

Казахский национальный университет имени аль-Фараби

УДК 524.882

На правах рукописи

МАЛЫБАЕВ АЛГИС НУРГИСАЕВИЧ

Различные аспекты дилатонных черных дыр дионного типа

8D05306 – Физика

Диссертация на соискание ученой степени
доктора философии (PhD)

Научный консультант:
Бошкаев Куантай
Авгазыевич
PhD, профессор КазНУ
им. аль-Фараби,
Алматы, Казахстан

Зарубежный научный консультант:
Ивашук Владимир Дмитриевич
д.ф.-м.н., профессор института
гравитации и космологии РУДН,
Москва, Россия

Республика Казахстан
Алматы, 2023

СОДЕРЖАНИЕ

	ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ	3
	ВВЕДЕНИЕ	4
1	СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ	8
2	ДИЛАТОН-ДИОННЫЕ ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ	17
2.1	Модель дилатон-дионной черной дыры с одним скалярным полем и двумя 2-формами	17
2.2	Модель дилатон-дионной черной дыры с двумя скалярными полями и двумя 2-формами	27
2.2.1	Действие модели	27
2.2.2	Уравнения движения	27
2.2.3	Точное чернотырное решение	32
3	ФИЗИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ ДИЛАТОН-ДИОННОЙ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ	51
3.1	Физические параметры дилатон-дионной черной дыры с одним скалярным полем и двумя 2-формами	51
3.2	Физические параметры дилатон-дионной черной дыры с двумя скалярными полями и двумя 2-формами	55
3.2.1	Гравитационная масса и скалярные заряды	55
3.2.2	Постньютоновские параметры	58
3.2.3	Термодинамические параметры: температура Хокинга и энтропия	65
3.2.4	Термодинамика черной дыры	66
4	КВАЗИНОРМАЛЬНЫЕ МОДЫ ДИЛАТОН-ДИОННОЙ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ	72
4.1	Квазинормальные моды	74
4.2	Предельные случаи, соответствующие черным дырам Шварцшильда и Рейснера-Нордстрёма	82
4.3	Гипотеза Хода	83
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ	90
	ПРИЛОЖЕНИЕ А	92
	ПРИЛОЖЕНИЕ Б	101
	СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	104

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

- КНМ - квазинормальные моды;
ЧД - черная дыра;
ВКБ - Вентцель-Крамерс-Бриллюэн;
ОТО - общая теория относительности;
Четырехмерные тензорные индексы обозначаются латинскими и греческими буквами i, k, l, μ, ν, \dots и пробегают значения 0,1,2,3;
 R - скалярная кривизна пространства;
 $R_{\mu\nu}$ - тензор Риччи;
 R_{klm}^i - тензор Римана или четырехмерный тензор кривизны;
 $g_{\mu\nu}$ - метрический тензор;
 $T_{\mu\nu}$ - тензор энергии-импульса;
 S - действие;
 ds^2 - метрика;
 ω_{Re} - реальная часть квазинормальной моды;
 ω_{Im} - скорость затухания квазинормальной моды;
 T_H - температура Хокинга;
 n - номер обертона;
 Q_1 - электрический цветной заряд;
 Q_2 - магнитный цветной заряд;
 G - гравитационная постоянная;
 c - скорость света;
ЭП - эйкональное приближение;

ВВЕДЕНИЕ

Общая характеристика работы.

В диссертационной работе исследованы различные аспекты дилатонных черных дыр дионного типа в 4-мерной теории гравитации.

Актуальность темы исследования.

Актуальность данной работы связана с недавним обнаружением гравитационных волн. Открытие гравитационных волн усилило давний интерес международного научного сообщества к исследованию квазинормальных мод (КНМ), предсказанных Вишвешварой в 1970 году. Обнаруженные гравитационные волны были испущены во время заключительной стадии слияния двух черных дыр. Во время этой стадии ЧД испытывают затухающие колебания, которые называются КНМ. Тщательный анализ КНМ весьма важен, так как он может дать информацию о ЧД и способен пролить свет на природу сильного гравитационного поля.

В настоящее время существует интерес к сферически-симметричным решениям, в том числе черноты, которые появляются в гравитационных моделях со скалярными полями и антисимметричными формами (в том числе в моделях суперструнного происхождения) и могут быть связаны с алгебрами Ли и цепочками Тоды.

При этом специальный подкласс 4-мерных решений в модели гравитации со скалярными (в т.ч. дилатонными) полями и полями 2-форм с дилатонной связью экспоненциального типа пока что еще недостаточно изучен, в том числе с точки зрения КНМ.

Цель работы.

Получение и подробное исследование точного решения для дилатон-дионной черной дыры, возникающей в 4-мерной теории гравитации с двумя скалярными полями и двумя полями 2-форм, которое позволит определить такие характеристики, как гравитационную массу, скалярные заряды, температуру Хокинга, энтропию, параметризованные пост-ньютоновские параметры и на их основе проверить первый закон термодинамики и соотношение Смарра, а также получить и исследовать спектр КНМ для безмассового пробного скалярного поля в эйкональном приближении (ЭП).

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- используя уравнения движения для рассматриваемой модели, получить точное сферически-симметричное дилатон-дионное черноты решение;
- на основе точного дилатон-дионного черноты решения, рассчитать такие физические характеристики, как гравитационную массу, скалярные заряды, температуру Хокинга, энтропию черной дыры, параметризованные пост-ньютоновские параметры;
- на основе полученных физических характеристик проверить первый закон термодинамики и соотношение Смарра;
- вычислить спектр КНМ для безмассового пробного скалярного поля в эйкональном приближении;

- проверить неравенство Хоуда, связывающего температуру Хокинга и мнимую часть циклических частот КНМ.

Объект исследования.

Дилатон-дионная черная дыра

Предмет исследования.

Физические характеристики дилатон-дионной черной дыры, такие как гравитационная масса, электрический и магнитный заряды, скалярные заряды, температура Хокинга, энтропия Бекенштейна-Хокинга для черной дыры, параметризованные пост-ньютоновские параметры, КНМ

Методы исследования.

При решении задач, необходимых для достижения поставленных целей, использованы методы численного и аналитического решения и исследования нелинейных дифференциальных уравнений, методы дифференциальной геометрии, методы вариационного исчисления.

Новизна работы.

В диссертационной работе впервые получены следующие результаты:

- в модели 4-мерной гравитации с двумя скалярными (дилатонными) полями и двумя полями 2-форм с экспоненциальной дилатонной связью исследована возможность существования точного дилатон-дионного неэкстремального чернотырного решения;

- рассчитаны физические параметры неэкстремальной дилатон-дионной черной дыры, такие как гравитационная масса M , дублет скалярных зарядов \vec{Q}_ϕ , электрический и магнитный заряды Q_1, Q_2 ;

- определены температура Хокинга и энтропия Бекенштейна-Хокинга для модели 4-мерной гравитации с двумя скалярными (дилатонными) полями и двумя полями 2-форм с экспоненциальной дилатонной связью. Проверены первый закон термодинамики и соотношение Смарра;

- получен спектр квазинормальных мод для пробного скалярного, электрически нейтрального поля в эйкональном приближении ($l \gg 1, l \gg n$, где l – орбитальное квантовое число, а n – число обертонов) на фоне метрики найденного чернотырного решения;

- исследовано неравенство Хоуда, связывающее температуру Хокинга и мнимую часть циклических частот квазинормальных мод в эйкональном приближении ($l \gg 1$) и при наименьшем значении числа обертонов $n = 0$.

Теоретическая и практическая значимость исследования.

Получение и анализ точных решений в модели 4-мерной гравитации со скалярными полями и полями 2-форм, а также - спектра КНМ для пробного поля на фоне решения являются важными задачами для понимания природы гравитации в режиме сильного поля.

Положения, выносимые на защиту:

- в модели 4-мерной гравитации с двумя скалярными (дилатонными) полями и двумя полями 2-форм с экспоненциальной дилатонной связью, описываемой двумя двумерными векторами дилатонной связи $\vec{\lambda}_1$ и $\vec{\lambda}_2$, существует точное дилатон-дионное неэкстремальное чернотырное решение при

значениях $\vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2$, удовлетворяющих неравенствам: $\vec{\lambda}_1(\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2) > 0, \vec{\lambda}_2(\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2) > 0$;

- физические параметры неэкстремальной дилатон-дионной черной дыры, такие как гравитационная масса M , дублет скалярных зарядов \vec{Q}_φ , электрический и магнитный заряды Q_1, Q_2 , связаны соотношением: $2(GM)^2 + \vec{Q}_\varphi^2 = Q_1^2 + Q_2^2 + 2\mu^2$, где $\mu > 0$ - параметр экстремальности, G - гравитационная постоянная;

- произведение температуры Хокинга и энтропии Бекенштейна-Хокинга не зависит явно от векторов дилатонной связи $\vec{\lambda}_s$ и зарядов Q_s ;

- спектр квазинормальных мод для пробного скалярного, электрически нейтрального поля в эйкональном приближении ($l \gg 1, l \gg n$, где l – орбитальное квантовое число, а n – число оборотов) на фоне метрики найденного черной дыры решения зависит от параметра a ($0 < a \leq 2$), который в пределе $a = +0$ совпадает с результатом Б. Машхуна, отвечающим черной дыре Шварцшильда, а при $a = 2$ совпадает с результатом Н. Андерсона, отвечающим заряженной черной дыре Рейсснера–Нордстрема;

- неравенство Хода, связывающее температуру Хокинга и мнимую часть циклических частот квазинормальных мод, выполняется в эйкональном приближении ($l \gg 1$) и при наименьшем значении числа оборотов $n = 0$: а) для всех значений (коллективного) заряда $Q > 0$ при $0 < a \leq 1$, б) для достаточно малых значений заряда Q : $Q/M < q_{crit}(a)$ при $1 < a \leq 2$.

Достоверность и обоснованность полученных результатов.

Полученные результаты являются достоверными так как основаны на известных методах исследования, апробированных в работах большого числа известных авторов. Кроме того, полученные результаты аналитических расчетов согласуются с ранее известными решениями для частных и предельных случаев. Основные результаты работы опубликованы в журнале с высоким импакт-фактором и докладывались на международных научных конференциях ближнего и дальнего зарубежья.

Личный вклад автора заключается в том, что весь объем диссертационной работы, выбор метода решения задач и численные расчеты выполнены автором самостоятельно. Постановка задач и обсуждение результатов проводились совместно с научными руководителями.

Апробация диссертационной работы.

Результаты, полученные в диссертационной работе, докладывались и обсуждались:

- на научных семинарах кафедры теоретической и ядерной физики КазНУ им. аль-Фараби;

- на международной научной конференции студентов и молодых ученых «Фараби элемі», Алматы, 4-7 апреля 2022 года;

- на международной научной конференции студентов и молодых ученых «Фараби элемі», Алматы, 6-8 апреля 2021 года;

- на международной научной конференции студентов и молодых ученых «Фараби элемеі», Алматы, 6-9 апреля 2020 года;
- на 5-ой международной онлайн-конференции по физике частиц и астрофизике (ICPPA-2020), Москва, 5–9 октября, 2020 года;
- на международной онлайн-конференции по релятивистской астрофизике и гравитации (IWRAG-2021), Ташкент, 12-14 мая, 2021 года;
- на международной научной онлайн-конференции «Sixteenth Marcel Grossmann Meeting», Италия, Рим, 2021 года.

Публикации. По материалам диссертационной работы опубликованы 8 печатных работ: 2 статьи в журналах, входящих в международный информационный ресурс Web of Knowledge (Thomson Reuters, США) и Scopus (Elsevier, Нидерланды); 1 – в журнале, входящем в международный информационный ресурс Scopus (Elsevier, Нидерланды); 5 работ в сборниках Международных научных конференций.

Объем и структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, 4 разделов, 2 приложений и списка использованных источников из 87 наименований, содержит 108 страниц текста, включая 10 рисунков и 2 таблицы.

1 СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ

В последние годы количество исследований, посвящённых проблематике черных дыр (ЧД), значительно увеличилось. Отчасти это связано с открытием явления гравитационных волн, развеявших у научного сообщества последние сомнения в существовании ЧД.

Обратимся к истории изучения астрофизикой проблемы ЧД.

ЧД представляют собой область пространства-времени с сильным гравитационным полем, в которую могут проникать сигналы и объекты, но из которой они не могут выйти, в том числе свет [1]. Граница области, за которой внешний наблюдатель не сможет увидеть события, называется горизонтом событий. Радиус горизонта событий называется радиусом Шварцшильда (r_s).

Теория ЧД основывается на Общей Теории Относительности (ОТО), из которой следует возможность их существования. ОТО предполагает, что гравитационное поле имеет геометрическую природу. ОТО основывается на уравнениях Эйнштейна, которые связывают кривизну пространства-времени с распределением, заключенной в нём материи.

Для ЧД, достигших стационарного состояния, решения описываются тремя параметрами: массой (M), зарядом (Q), моментом количества движения (L).

Поиск и анализ решений уравнения Общей теории относительности (ОТО) – весьма обширная область физики. Ниже будут разобраны основные решения сферической симметрии для уравнений Эйнштейна, объектами которых выступают ЧД с определёнными свойствами.

Решение Шварцшильда описывает невращающуюся, незаряженную, сферически-симметричную ЧД. Метрика этого решения дается выражением:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (1.1)$$

где

- t - временная координата, в секундах,
- r - радиальная координата, в метрах,
- θ - полярная угловая координата, в радианах,
- φ - азимутальная угловая координата, в радианах,
- r_s - радиус Шварцшильда тела с массой M , в метрах, определяемый как

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}, \quad (1.2)$$

где G - гравитационная постоянная, а c - скорость света (в вакууме).

Решение Рейснера-Нордстрема описывает невращающуюся, заряженную, сферически-симметричную ЧД. Метрика имеет вид:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2} \right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (1.3)$$

где

c - скорость света, в м/с,
 t - временная координата (время, измеряемое на бесконечно удалённых неподвижных часах), в секундах,
 r - радиальная координата, в метрах,
 θ - полярная угловая координата, в радианах,
 φ - азимутальная угловая координата, в радианах,
 r_s - радиус Шварцшильда (в метрах) тела с массой M ,
 r_Q - масштаб длины (в метрах), соответствующий электрическому заряду Q (аналог радиуса Шварцшильда, только не для массы, а для заряда) и определяемый как:

$$r_Q^2 = \frac{Q^2 G}{4\pi \epsilon_0 c^4}, \quad (1.4)$$

где $\frac{1}{4\pi \epsilon_0}$ - постоянная Кулона (в единицах СИ).

Построение единой теории поля, включающей все четыре фундаментальных взаимодействия является основной задачей теоретической физики. Одно из четырех фундаментальных взаимодействий, а именно, гравитационное описывается Общей Теорией Относительности (ОТО), а остальные три – сильное, слабое и электромагнитное – объясняются Стандартной моделью (СМ). Бозон Хиггса, открытый 10 лет назад, стал последним элементом в оформлении Стандартной модели, закрыв вопрос о принципах образования массы элементарных частиц. В современных экспериментах проводится поиск данных, подтверждающих реальность так называемой “новой физики”, которая отличается от СМ, в связи с этим, существует необходимость объяснения результатов экспериментов, которые невозможно объяснить в рамках СМ. Одним из таких результатов является обнаружение темной материи (ТМ), которую удалось определить благодаря гравитационному взаимодействию с обычным веществом. Как сама ТМ, так и предполагаемые гипотетические частицы, из которых она состоит, не описываются СМ, поэтому требуется её расширение.

В разное время на роль общей теории, которая дала бы возможность описать все фундаментальные взаимодействия, претендовали теория струн, теория Калуцы-Клейна, петлевая квантовая гравитация и ряд других теоретических концепций. Обнаружение бозона Хиггса позволяет говорить о существовании скалярных фундаментальных полей. Одним из наиболее часто встречающихся дополнительных полей, взаимодействующих с полями классической

электродинамики согласно версиям предсказаний теорий Великого Объединения, выступает дилатонное скалярное поле. Выдвигаются гипотезы, согласно которым посредством дилатонного скалярного поля может быть достигнуто взаимодействие частиц ТМ с частицами СМ [2].

Дилатонное скалярное поле ϕ появляется в теории Калуцы-Клейна как компонента g_{55} метрического тензора, где “5” — дополнительное круговое направление, и эта компонента подчиняется неоднородному волновому уравнению, обобщающему уравнение Клейна-Гордона, с электромагнитным полем в качестве источника:

$$\square \phi = -\frac{k^2 \phi^3}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}. \quad (1.5)$$

Частицей скалярного поля ϕ является дилатон [3], также известный, как радион или гравискаляр.

В физике элементарных частиц есть немало теорий, не считая дилатона, в которых описываются частицы, обладающие и магнитным, и электрическим зарядом. Этим предполагаемым частицам дано название *дионы*.

Дион — предположительно существующая элементарная частица, являющаяся магнитным монополем с ненулевым электрическим зарядом [4]. Включение в расчётный процесс дионов позволяет решить уравнения неабелевых калибровочных теорий. Автором концепции дионов, выступающих в роли базовых элементов адронов, а также самого термина стал Д. Швингер, в 1969 г. предположивший о существовании данной частицы при изучении магнитного монополя Дирака.

Как нам известно, электромагнитное поле, его преобразования описаны в теории электродинамики благодаря системе максвелловских уравнений. Приведённые Дж. Максвеллом формулы позволяют связать движение заряженных частиц с магнитным и электрическим полями, причём данные уравнения почти не отличаются как для электричества, так и для магнетизма. Это сходство можно усилить, если ввести помимо электрического заряда q_e и тока дополнительные переменные - плотность магнитного заряда ρ_m (магнитный заряд q_m) и плотность магнитного тока j_m (магнитный ток).

В результате своих экспериментов Поль Дирак пришёл к выводу, согласно которому магнитный заряд гипотетического монополя имеет конкретное, а не произвольное значение, поскольку является кратным элементарному магнитному заряду $g_0 = \frac{\hbar c}{2e}$, где e - элементарный электрический заряд.

Так, присутствие единственного монополя Дирака с известным зарядом позволило бы объяснить обнаруженную в ходе экспериментов кратность величине e электрических зарядов частиц; при этом магнитный заряд также подлежал бы квантованию.

Одним из не до конца изученных вопросов в области исследования черных дыр является модель дионной черной дыры в присутствии поля дилатона.

Статические сферически-симметричные черные дыры с электрическим и/или магнитным зарядом хорошо изучены, а решения для них представлены известной метрикой Райсснера–Нордстрема (РН). Однако при наличии поля дилатона ситуация становится намного более сложной.

В настоящее время существует определенный интерес к сферически-симметричным решениям для таких черных дыр и черных бран, связанных с алгебрами Ли и цепочками Тога, см. [5-30], и ссылки там. Эти решения появляются в гравитационных моделях со скалярными полями и антисимметричными формами.

В работе М. Е. Абишева с соавторами было получено и рассмотрено дилатонно-дионные решения для черных дыр с произвольной дилатонной константой связи $\lambda \neq 0$ и каноническим знаком $\varepsilon = +1$ для кинетического члена скалярного поля [31]. Эти решения определяются с точностью до решений двух основных уравнений для модульных функций. При $\lambda^2 \neq 1/2$ решения расширяются до $\varepsilon = \pm 1$, где $\varepsilon = -1$ соответствует фантомному скалярному полю. Попутно, авторы пришли к хорошо известной нижней границе для массы черной дыры, которая была получена ранее Гиббонсом, Кастором, Лондоном, Таунсендом и Трашен с помощью спинорных методов.

Далее решения из работы [31] были расширены М. Е. Абишевым с соавторами в статье [32], и там был построен подкласс дионоподобных решений дилатонных черных дыр с электрическим и магнитным зарядами Q_1 и Q_2 , соответственно, в 4-мерной модели с метрикой g , скалярным полем φ , двумя 2-формами $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$, отвечающими двум константам дилатонной связи λ_1 и λ_2 , соответственно, при этом $\lambda_1 \neq -\lambda_2$. Все поля в [32] были определены на ориентированном многообразии \mathcal{M} . Здесь рассматривалась дионоподобная конфигурация для полей форм:

$$F^{(1)} = Q_1 e^{2\vec{\lambda}_1 \vec{\varphi}} * \tau, \quad F^{(2)} = Q_2 \tau, \quad (1.6)$$

где $\tau = \text{vol}[S^2]$ — форма объема на двумерной сфере, $a * = * [g]$ — оператор Ходжа, соответствующий ориентированному многообразию \mathcal{M} с метрикой g . Эту несоставную (некомпозиционную) конфигурацию называют дионоподобной, чтобы отличить ее от истинной дионной конфигурации, которая по существу является составной (композиционной) и должна в этом случае иметь вид: (i) $F^{(1)} = Q_1 e^{2\vec{\lambda}_1 \vec{\varphi}} * \tau + Q_2 \tau$, $F^{(2)} = 0$, или (ii) $F^{(1)} = 0$, $F^{(2)} = Q_1 e^{2\vec{\lambda}_2 \vec{\varphi}} * \tau + Q_2 \tau$.

С физической точки зрения анзац (1.6) отвечает заряженной черной дыре, имеющей два «цветных» заряда: Q_1 и Q_2 . Заряд Q_1 — электрический, соответствующий форме $F^{(1)}$, а заряд Q_2 — магнитный, соответствующий форме $F^{(2)}$. При совпадающих дилатонных константах связи $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ авторы [32] получили тривиальное несоставное обобщение дилатонных решений черных дыр дионного типа в модели с одной 2-формой, которая рассматривалась в [31], см. также [7,12,13,16,25,30] и ссылки там.

Заметим, что дилатонное скалярное поле может быть как обычным, так и фантомным. Значения знакового параметра $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = -1$ соответствуют

обычному и фантомному скалярным полям, соответственно. Фантомное поле возникает в действии с кинетическим членом «неправильного» знака ($\varepsilon = -1$), что подразумевает нарушение слабого энергетического условия $\rho \geq -p$. Согласно [33], на квантовом уровне такие поля могли бы образовать «фантомный конденсат», который мог бы быть ответственным за законы модифицированной гравитации в инфракрасном диапазоне. Данные наблюдений не исключают такой возможности [34].

Далее в работе [35] были исследованы дионоподобные решения для дилатонной черной дыры в гравитационной 4-мерной модели со скалярным полем, двумя 2-формами, двумя дилатонными константами связи $\lambda_i \neq 0$, $i = 1, 2$, удовлетворяющими $\lambda_1 \neq -\lambda_2$ и знаковым параметром $\varepsilon = \pm 1$ для кинетического члена скалярного поля. Аналогичные решения были рассмотрены ранее в [36] для $\varepsilon = 1$. Здесь $\varepsilon = -1$ соответствует фантомному скалярному полю. Решения определялись с точностью до решений двух основных уравнений для двух модульных функций, когда $0 < \lambda_i^2 < 1/2$ для $\varepsilon = -1$. Были рассмотрены несколько интегрируемых случаев, соответствующим алгебрам Ли $A_1 + A_1$, A_2 , $B_2 = C_2$ и G_2 , в то время как в [36] были получены только случаи B_2 и G_2 . Как и в работах [31,32] выведены некоторые физические параметры решений, таких как: гравитационная масса, скалярный заряд, температура Хокинга, энтропия черной дыры и параметризованные постньютоновские (ППН) параметры β и γ . Как оказалось, ППН параметры не зависят от констант связей λ_i и ε . Были найдены ограничения на гравитационную массу M и скалярный заряд Q_φ (при фиксированном и произвольном параметре экстремальности $\mu > 0$). Эти оценки проверялись численно на некоторых примерах [31]. Как и в работе [31,32], здесь эта задача решалась с помощью гипотезы, утверждающей однозначное (гладкое) соответствие между парой (Q_1^2, Q_2^2) , где Q_1 — электрический заряд, а Q_2 — магнитный заряд, и парой положительных параметров (P_1, P_2) , которые появляются при разложении модульных функций на больших расстояниях в случае $1 + 2\lambda_i^2\varepsilon > 0$, $i = 1, 2$. Эта гипотеза выполняется для всех $\lambda_i \neq 0$ случае обычного скалярного поля и для $0 < \lambda_i^2 < 1/2$ в случае фантомного скалярного поля (в обоих случаях выполняется неравенство $\lambda_1 \neq -\lambda_2$).

В этой диссертации продолжены предыдущие исследования [31,32,35,37], посвященные дилатонным дионным и дионоподобным решениям для черных дыр.

Усилению интереса к квазинормальным модам (КНМ) поспособствовало и недавнее открытие гравитационных волн — благодаря зарегистрированным колебаниям, относящимся, предположительно, к завершающему этапу слияния двойных черных дыр (ringdown). На его протяжении ЧД начинают активно испускать затухающие колебания, соответствующие определенным комплексным частотам, которые называются КНМ. Изучение частотных и временных характеристик полученного сигнала позволяет добыть ценную информацию о «функционировании» черной дыры в рамках ОТО - оценить её параметры и получить бесценные сведения о природе гравитации в условиях

воздействия сильного поля. Квазинормальные моды также играют важную роль в квантово-механическом процессе испарения черных дыр. Разработанная Йорком модель (1983) [38], описывающая протекание этого процесса, использует для измерения температуры испаряемого из черной дыры излучения, флуктуации горизонта на частотах нормальной моды.

Первым исследователем, заявившим о квазинормальных модах, был Вишвешвара [39], занимавшийся вычислением распространения гравитационных волн вокруг черной дыры Шварцшильда. Точное понимание зависимости КНМ от параметров черной дыры позволит нам получить ценную информацию при анализе сигнала гравитационных волн.

Возмущения ЧД бывают двух типов [40]:

- 1) гравитационные возмущения, или возмущения метрики;
- 2) возмущения, ставшие следствием добавления пробных полей к пространству-времени черной дыры.

Например, к возмущению собственно черной дыры часто приводит возмущение пробного скалярного поля в пространстве-времени дилатон-дионной ЧД.

Если рассматривать только сферическую симметрию, данное поле делится на сферические гармоники, описываемые мультипольным числом l . Отделение угловых переменных приводит к волновому уравнению следующего вида:

$$\frac{\partial^2 \Psi^*(r)}{\partial r_*^2} + [\omega^2 - V(r)]\Psi^*(r) = 0, \quad (1.7)$$

где $V(r)$ - эффективный потенциал, $\Psi^*(r)$ - волновая функция, r - исходная радиальная координата, а r_* - радиальная «черепашня» координата, где горизонт ЧД находится на $r_* = -\infty$, а пространственная бесконечность на $r_* = \infty$ и $r = r(r_*)$ - гладкая функция.

При фиксированной фоновой метрике волновая функция находится в экспоненциальной зависимости от временного показателя $e^{-i\omega t}$ и частота ω является комплексной. Рассмотрим $\omega = \omega_{Re} + i\omega_{Im}$, в котором ω_{Re} определяет фактическую частоту процесса осцилляции, а ω_{Im} - скорость затухания моды. Для радиационных мультиполей и отдельных значений ω справедливы вышеуказанные решения (1.7), не включающие исходящие волны с пространственной бесконечности и горизонта. Вот такого рода решения представляют собой КНМ ЧД - при этом собственными частотами становятся соответствующие комплексные частоты. При отрицательной ω_{Im} мода затухает — при этом с каждым колебанием амплитуда будет уменьшаться в $e^{-2\pi|\omega_{Im}|/\omega_{Re}}$ по сравнению с начальной.

КНМ впервые были получены для черной дыры Шварцшильда в работе [41] благодаря приведению радиальной части (1.7) начального волнового уравнения к уравнению Рикатти. Основная проблема заключалась в необходимости проводить асимптотически нормальные оценки на горизонте и бесконечности, т.е. строго в границах интегрирования. Используя этот метод, в дальнейшем

получивший название метода Чандрасекара-Детвейлера, получилось выделить лишь основной обертоном.

Профессор Бахрам Машхун [42,43] внёс идею по оценке значений КНМ с помощью инвертирования эффективного потенциала, как правило, имеющего вид потенциального барьера и определенные значения на горизонте и бесконечности, и «приведения» его к потенциалу Пешля-Теллера. Подобный путь к решению проблемы, прежде рассматривавшийся исключительно через призму численных методов, поспособствовал разработке ВКБ-подхода, обладающего гораздо большей точностью: в исследовании [44] представлена простая ВКБ-формула первого порядка, т.е. следующего после ЭП для оценки КНМ:

$$\omega^2 = V_0 - i \left(n + \frac{1}{2} \right) \sqrt{-2V_0''}. \quad (1.8)$$

Так как эффективный потенциал V выступает в качестве потенциального барьера (V_0 - максимальное значение), то вопрос выявления КНМ сводится к проблеме, подобной квантово-механической задаче рассеяния волн на пике потенциального барьера, где роль энергии играет квадрат КН-частоты. Затем пространство от горизонта до бесконечности разбивается уровнем «постоянной энергии» (ω^2) на три сектора, имеющих две поворотные точки (см. рис.1 [40]). Между точками поворота, в среднем секторе мы разлагаем решение в ряд Тейлора в окрестности пика потенциального барьера, после чего, отыскав во «внешних» секторах асимптотические решения, «сшиваем» их с найденным внутренним решением.

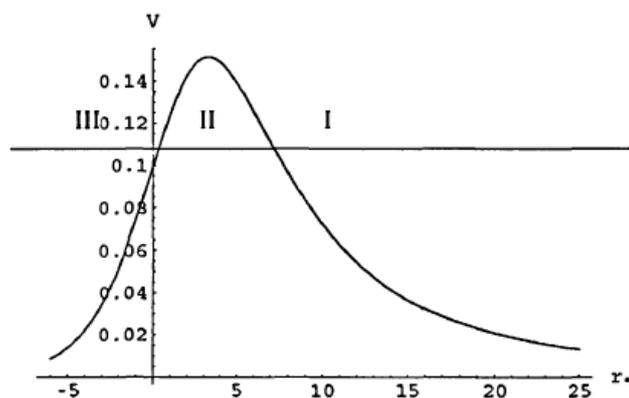


Рис. 1. Эффективный потенциал V как функция черепашьей координаты r_* для гравитационных полярных возмущений Шварцшильдовой черной дыры. Прямая – линия «постоянной энергии» ω^2 [40].

Согласно результатам дальнейшего анализа, проведённого Бломе, Феррари и Машхуном [42,43], КНМ ЧД через аналитическое продолжение взаимосвязаны с энергиями связанных состояний ангармонических осцилляторов. Эти работы легли в основу [45] альтернативного способа вычисления квазинормальных мод.

Его применение [45], позволяет нам вычислить до высоких порядков пертурбативное разложение ВКБ.

Из теории возмущений ЧД следует основное радиальное уравнение такого вида:

$$\left(\epsilon^2 \frac{d^2}{dr_*^2} + \omega^2 - V(r_*) \right) \phi(r_*) = 0, \quad (1.9)$$

где r_* - “черепашья” радиальная переменная. Горизонт ЧД расположен на $r_* = -\infty$, а пространственная бесконечность - на $r_* = \infty$. Для характеристики ряда ВКБ в уравнение введён параметр ϵ , отвечающий в рамках подхода квантовой механики постоянной Планка. По этой причине разложение около $\epsilon = 0$ следует относить к примеру квазиклассического разложения. В ряде случаев параметр ϵ определяется равным 1. В большинстве случаев потенциал $V(r_*)$ обладает формой, представленной на рис.2 (слева), имея глобальный максимум. Описываемая процедура не ограничивается такими типичными потенциалами.

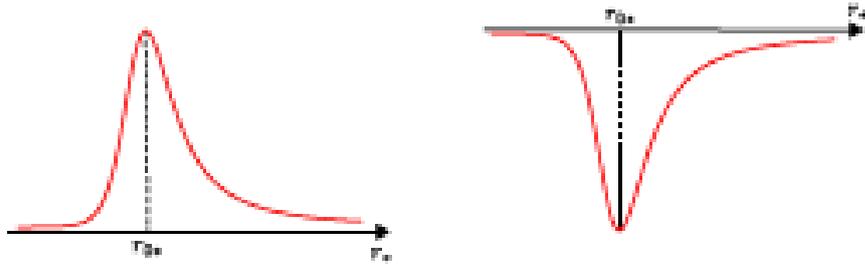


Рис. 2. (Слева) типичная форма потенциала $V(r_*)$. (Справа) “перевернутый” потенциал $-V(r_*)$, который имеет связанные состояния [45].

Одновременно проанализируем уравнение Э. Шредингера с инвертированным потенциалом:

$$\left(-\hbar^2 \frac{d^2}{dr_*^2} - V(r_*) \right) \psi(r_*) = E\psi(r_*). \quad (1.10)$$

Понятно, что «перевернутый» потенциал $-V(r_*)$, показанный на рис.2 (справа), имеет минимум и связанные состояния при $\hbar > 0$ и $E < 0$. Представим энергию n -го связанного состояния через $E_n^{BS}(\hbar)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Рассмотрим аналитическое продолжение по \hbar . В случае если $\hbar = i\epsilon$ уравнение Шредингера (1.10) с $E = -\omega^2$ приходит к тому же виду, что и (1.9). Таким образом, КН-частота ω_n^{QNM} когда $\epsilon = 1$ связана с энергией связанного состояния E_n^{BS} при $\hbar = i$ следующим соотношением

$$(\omega_n^{QNM})^2 = -E_n^{BS}(\hbar = i). \quad (1.11)$$

Данное уравнение является основным в приведённом анализе. Разумеется, для подтверждения или опровержения полученных выводов, следует тщательно изучить связь граничных условий, представленных с обеих сторон с аналитическим продолжением по \hbar . На самом деле, в примере о связанном состоянии убывающее по экспоненте решение в $r_* \rightarrow \infty$ ведет как $e^{-\sqrt{-E}r_*/\hbar}$, аналитически продолжаясь до «уходящего» решения с асимптотикой $e^{+i\omega r_*}$, выступающего в качестве граничного условия, налагаемого на пространственную бесконечность для КНМ. Подобным образом затухающее решение $e^{+\sqrt{-E}r_*/\hbar}$ при $r_* \rightarrow -\infty$ продолжается до входящей моды $e^{-i\omega r_*}$ на горизонте. В связи с этим, существует определённая связь между двумя граничными условиями посредством аналитического продолжения по \hbar . Стоит обратить внимание, что в исследовании [45] рассматривалось аналитическое продолжение по постоянной Планка, тогда как в других работах [42,43] аналитически продолжались радиальные координаты r и r_* .

Х. Блом и Б. Машхун в работе [46] получили квазинормальные моды в эйкональном приближении для ЧД Шварцшильда, а Н. Андерсон и Х. Онозава в работе [47] рассмотрели их для заряженной ЧД Рейсснера-Нордстрема.

Ход в результате своих научных изысканий [48] пришёл к любопытным выводам о скорости затухания основного колебания: согласно его гипотезе, мнимые части частот наиболее долгоживущих КНМ обладают верхней границей, которая ограничена произведением температуры Хокинга и числа π . То есть, в спектре КНМ должна быть частота, абсолютная величина мнимой части которой меньше, чем температура Хокинга ЧД, умноженная на π . Следовательно, для асимптотически и неасимптотически плоских черных дыр одинаково справедливо неравенство вида:

$$|Im(\omega)| \leq \pi T_H, \quad (1.12)$$

где T_H - температура Хокинга.

В диссертации были вычислены КНМ для дилатон-дионной ЧД с использованием метода, предложенного в [45], и проверена гипотеза Хода.

2 ДИЛАТОН-ДИОННЫЕ ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ

2.1 Модель дилатон-дионной черной дыры с одним скалярным полем и двумя 2-формами

Модель с одним скалярным полем, векторами дилатонной связи и двумя 2-формами описывается следующим действием [35]:

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{|g|} \left\{ R[g] - \varepsilon g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \frac{1}{2} e^{2\lambda_1 \varphi} F_{\mu\nu}^{(1)} F^{(1)\mu\nu} - \frac{1}{2} e^{2\lambda_2 \varphi} F_{\mu\nu}^{(2)} F^{(2)\mu\nu} \right\}. \quad (2.1)$$

Здесь первый член описывает гравитационное поле, второй – это кинетический член, описывающий скалярное поле, а третий и четвертый члены описывают абелевы калибровочные аналоги электромагнитного поля, промодулированные скалярными полями, где $g = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu \otimes dx^\nu$ - метрика, $|g| = |\det(g_{\mu\nu})|$, φ - скалярное поле, $F^{(i)} = dA^{(i)} = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^{(i)} dx^\mu \wedge dx^\nu$ - 2-форма с $A^{(i)} = A_\mu^{(i)} dx^\mu$, $i = 1, 2$, $\varepsilon = \pm 1$, G - гравитационная постоянная, $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ - константы связи, удовлетворяющие неравенству

$$\lambda_1 \neq -\lambda_2. \quad (2.2)$$

Здесь мы также положили $\lambda_i^2 \neq \frac{1}{2}$, $i = 1, 2$, для $\varepsilon = -1$.

Рассмотрим семейство дионоподобных чернотырных решений уравнений поля, соответствующих действию (2.1), определенных на многообразии:

$$\mathcal{M} = (2\mu, +\infty) \times S^2 \times \mathbb{R}, \quad (2.3)$$

и имеющих следующий вид:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = H_1^{h_1} H_2^{h_2} \left\{ -H_1^{-2h_1} H_2^{-2h_2} \left(1 - \frac{2\mu}{R} \right) dt^2 + \frac{dR^2}{1 - \frac{2\mu}{R}} + R^2 d\Omega_2^2 \right\}, \quad (2.4)$$

$$\exp(\varphi) = H_1^{h_1 \lambda_1 \varepsilon} H_2^{-h_2 \lambda_2 \varepsilon}, \quad (2.5)$$

$$F^{(1)} = \frac{Q_1}{R^2} H_1^{-2} H_2^{-A_{12}} dt \wedge dR, \quad (2.6)$$

$$F^{(2)} = Q_2 \tau. \quad (2.7)$$

здесь Q_1 и Q_2 - (цветные) заряды — электрический и магнитный, соответственно, $\mu > 0$ - параметр экстремальности, $d\Omega_2^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ — каноническая метрика на единичной сфере S^2 ($0 < \theta < \pi, 0 < \phi < 2\pi$), $\tau = \sin\theta d\theta \wedge d\phi$ - стандартная форма объема на S^2 ,

$$h_i = K_i^{-1}, \quad K_i = \frac{1}{2} + \varepsilon \lambda_i^2, \quad (2.8)$$

$i = 1, 2$, и

$$A_{12} = (1 - 2\lambda_1\lambda_2\varepsilon)h_2. \quad (2.9)$$

Функции $H_s > 0$ подчиняются уравнениям

$$R^2 \frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{\left(1 - \frac{2\mu}{R}\right) dH_s}{H_s} \frac{dH_s}{dR} \right) = -K_s Q_s^2 \prod_{l=1,2} H_l^{-A_{sl}}, \quad (2.10)$$

со следующими наложенными граничными условиями:

$$H_s \rightarrow H_{s0} > 0, \quad (2.11)$$

для $R \rightarrow 2\mu$, и

$$H_s \rightarrow 1, \quad (2.12)$$

для $R \rightarrow +\infty, s = 1, 2$.

В (2.10) мы обозначаем

$$(A_{ss'}) = \begin{pmatrix} 2 & A_{12} \\ A_{21} & 2 \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

где A_{12} определено в (2.9) и

$$A_{21} = (1 - 2\lambda_1\lambda_2\varepsilon)h_1. \quad (2.14)$$

Эти решения можно получить, просто используя общие формулы для неэкстремальных (пересекающихся) чернотранных решений из [21-23] (для обзора см. [49]). Композитные аналоги решений с одной 2-формой и $\lambda_1 = \lambda_2$ представлены в работе [31].

Первое граничное условие (2.11) гарантирует (с точностью до возможного дополнительного требования аналитичности $H_s(R)$ в окрестности $R = 2\mu$)

существование (регулярного) горизонта при $R = 2\mu$ для метрики (2.4). Второе условие (2.12) обеспечивает асимптотически плоскую (при $R \rightarrow +\infty$) метрику.

Уравнения (2.10) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{d}{dz} \left[(1-z) \frac{dy^s}{dz} \right] = -K_s q_s^2 \exp \left(- \sum_{l=1,2} A_{sl} y^l \right), \quad (2.15)$$

$s = 1, 2$. Здесь и далее используются следующие обозначения: $y^s = \ln H_s$, $z = \frac{2\mu}{R}$, $q_s = \frac{Q_s}{2\mu}$ и $K_s = h_s^{-1}$ для $s = 1, 2$, соответственно. Мы ищем решения уравнений (2.15) для $z \in (0, 1)$, подчиняющиеся

$$y^s(0) = 0, \quad (2.16)$$

$$y^s(1) = y_0^s, \quad (2.17)$$

где $y_0^s = \ln H_{s0}$ - конечные (действительные) числа, $s = 1, 2$. Здесь $z = 0$ (точнее $z = +0$) соответствует бесконечности ($R = +\infty$), а $z = 1$ (или, точнее, $z = 1 - 0$) соответствует горизонту ($R = 2\mu$).

Из уравнений (2.15) с наложенными условиями конечности на горизонте (2.17) вытекает следующий интеграл движения:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (1-z) \sum_{s,l=1,2} h_s A_{sl} \frac{dy^s}{dz} \frac{dy^l}{dz} + \sum_{s=1,2} h_s \frac{dy^s}{dz} \\ & - \sum_{s=1,2} q_s^2 \exp \left(- \sum_{l=1,2} A_{sl} y^l \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Уравнения (2.15) и (2.17) появляются для специальных решений уравнений тодовского типа [22,23,49]

$$\frac{d^2 z^s}{du^2} = K_s Q_s^2 \exp \left(\sum_{l=1,2} A_{sl} z^l \right), \quad (2.19)$$

для функций

$$z^s(u) = -y^s - \mu b^s u, \quad (2.20)$$

$s = 1, 2$, в зависимости от гармонической радиальной переменной u : $\exp(-2\mu u) = 1 - z$, со следующей асимптотикой для $u \rightarrow +\infty$ (на горизонте):

$$z^s(u) = -\mu b^s u + z_0^s + o(1), \quad (2.21)$$

где z_{s0} - константы, $s = 1, 2$. Здесь и далее мы обозначаем

$$b^s = 2 \sum_{l=1,2} A^{sl}, \quad (2.22)$$

где обратная матрица $(A^{sl}) = (A_{sl})^{-1}$ корректно определена из-за $\lambda_1 \neq -\lambda_2$. Это следует из соотношений:

$$\begin{aligned} A_{sl} &= 2B_{sl}h_l, \\ B_{sl} &= \frac{1}{2} + \varepsilon\chi_s\chi_l\lambda_s\lambda_l, \end{aligned} \quad (2.23)$$

где $\chi_1 = +1$, $\chi_2 = -1$ и обратимости матрицы (B_{sl}) при $\lambda_1 \neq -\lambda_2$ в силу соотношения $\det(B_{sl}) = \frac{1}{2}\varepsilon(\lambda_1 + \lambda_2)^2$.

Интеграл энергии для (2.19), совместимый с асимптотическими условиями (2.21),

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{4} \sum_{s,l=1,2} h_s A_{sl} \frac{dz^s}{du} \frac{dz^l}{du} - \frac{1}{2} \sum_{s=1,2} Q_s^2 \exp\left(\sum_{l=1,2} A_{sl} z^l\right) = \\ &= \frac{1}{2} \mu^2 \sum_{s=1,2} h_s b^s \end{aligned} \quad (2.24)$$

приводит к уравнению (2.18).

Вывод решений (2.4)-(2.7), (2.10)-(2.12) можно извлечь из соотношений [21-23], где решения с горизонтом были получены из общих сферически-симметричных решений, подчиняющихся уравнениям тодовского типа, соответствующим невырожденной (квазикартановой) матрице A . В нашем случае эти уравнения задаются формулой (2.19) с матрицей A из (2.23), и из условия $\det A \neq 0$ следует $\lambda_1 \neq -\lambda_2$. Основные уравнения (2.10) эквивалентны этим уравнениям тодовского типа.

Явные аналитические решения уравнений (2.10), (2.11), (2.12) не существуют. Можно попытаться искать решения в виде

$$H_s = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} P_s^{(k)} \left(\frac{1}{R}\right)^k, \quad (2.25)$$

где $P_s^{(k)}$ — константы, $k = 1, 2, \dots$, и $s = 1, 2$, но только в нескольких интегрируемых случаях цепочка уравнений для $P_s^{(k)}$ обрывается.

Для $\varepsilon = +1$ существуют, по крайней мере, четыре интегрируемых конфигурации, связанных с алгебрами Ли $A_1 + A_1$, A_2 , $B_2 = C_2$ и G_2 . Далее рассмотрим их по отдельности.

Случай $A_1 + A_1$. Рассмотрим случай $\varepsilon = 1$ и

$$(A_{ss'}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

Получим:

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{1}{2}. \quad (2.27)$$

Для $\lambda_1 = \lambda_2$ мы получаем дилатонную связь, соответствующую индуцированной струнной модели. Матрица (3.2) является матрицей Картана для алгебры Ли $A_1 + A_1$ ($A_1 = sl(2)$). В этом случае

$$H_s = 1 + \frac{P_s}{R}, \quad (2.28)$$

где

$$P_s(P_s + 2\mu) = K_s Q_s^2, \quad (2.29)$$

$s = 1, 2$. Для положительных корней (2.29)

$$P_s = P_{s+} = -\mu + \sqrt{\mu^2 + K_s Q_s^2} \quad (2.30)$$

мы приходим к четко определенному решению для $R > 2$ с асимптотически плоской метрикой и горизонтом при $R = 2\mu$. Заметим, что в случае $\lambda_1 = \lambda_2$ ($A_1 + A_1$) - дионное решение имеет композитный аналог, рассмотренный ранее в [10,12]; см. также [17] для некоторых обобщений.

Случай A_2 . Теперь мы положим $\varepsilon = 1$ и

$$(A_{ss'}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

Получим:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \quad \lambda^2 = \frac{3}{2}. \quad (2.32)$$

Это значение константы дилатонной связи появляется после редукции 5-мерной модели Калуцы-Клейна к четырем измерениям. Получаем $h_s = \frac{1}{2}$, а (2.31) - матрица Картана для алгебры Ли $A_2 = sl(3)$. В этом случае получаем [22]

$$H_s = 1 + \frac{P_s}{R} + \frac{P_s^{(2)}}{R^2}, \quad (2.33)$$

где

$$2Q_s^2 = \frac{P_s(P_s + 2\mu)(P_s + 4\mu)}{P_1 + P_2 + 4\mu}, \quad (2.34)$$

$$P_s^{(2)} = \frac{P_s(P_s + 2\mu)P_{\bar{s}}}{2(P_1 + P_2 + 4\mu)}, \quad (2.35)$$

$s = 1, 2; \bar{s} = s + 1 \pmod{2} = 2, 1$.

В композитном случае [31] подъем Калуцы-Клейна до $D = 5$ дает нам известное решение Гиббонса-Уилтшира [8], которое следует из общего сферически-симметричного дионного решения (связанного с цепочкой Тоды A_2) из ссылки [7].

Случай C_2 . Теперь положим $\varepsilon = 1$ и

$$(A_{ss'}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Получаем интегрируемую конфигурацию, соответствующую алгебрам Ли $B_2 = C_2$ со степенями многочленов $(n_1, n_2) = (3, 4)$. Из (2.9), (2.14) и (2.36) получаем следующие соотношения для дилатонных констант связей:

$$\frac{1}{2} + \lambda_2^2 = 2 \left(\frac{1}{2} + \lambda_1^2 \right), \quad 1 - 2\lambda_1\lambda_2 = -\frac{1}{2} - \lambda_2^2. \quad (2.37)$$

Решая уравнения (2.37), получаем $(\lambda_1, \lambda_2) = \pm \left(\sqrt{2}, \frac{3}{\sqrt{2}} \right)$.

Модульные функции имеют вид [50]

$$H_1 = 1 + P_1 z + P_1^{(2)} z^2 + P_1^{(3)} z^3 = 1 + \bar{P}_1 \bar{z} + \bar{P}_1^{(2)} \bar{z}^2 + \bar{P}_1^{(3)} \bar{z}^3, \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} H_2 &= 1 + P_2 z + P_2^{(2)} z^2 + P_2^{(3)} z^3 + P_2^{(4)} z^4 = \\ &= 1 + \bar{P}_2 \bar{z} + \bar{P}_2^{(2)} \bar{z}^2 + \bar{P}_2^{(3)} \bar{z}^3 + \bar{P}_2^{(4)} \bar{z}^4, \end{aligned} \quad (2.39)$$

где $P_s = P_s^{(1)} = \bar{P}_s(2\mu)$ и $P_s^{(k)} = \bar{P}_s^{(k)}(2\mu)^k$ - константы, $s = 1, 2, z = \frac{1}{R}; \bar{z} = \frac{2\mu}{R}$.

Для параметров $\bar{B}_s = -K_s Q_s^2 / (2\mu)^2$ получаем следующие соотношения [50]:

$$2\bar{B}_1 = -\Delta + (2\bar{P}_1 + 3)(2 + \bar{P}_2), \quad (2.40)$$

$$\bar{B}_2 = -\Delta - 2 - 2\bar{P}_1(\bar{P}_1 + 3) - (2 + \bar{P}_2)^2 \quad (2.41)$$

и для параметров $\bar{P}_s^{(k)}$ получаем [50]:

$$4\bar{P}_1^{(2)} = 6 + 3\bar{P}_2 - \Delta + 2\bar{P}_1(3 + \bar{P}_1 + \bar{P}_2), \quad (2.42)$$

$$12\bar{P}_1^{(3)} = -\Delta(2 + \bar{P}_1 + \bar{P}_2) + 12 + 18\bar{P}_1 + 2\bar{P}_1^3 + 3\bar{P}_2(4 + \bar{P}_2) + 2\bar{P}_1^2(5 + \bar{P}_2) + \bar{P}_1\bar{P}_2(11 + 2\bar{P}_2), \quad (2.43)$$

$$2\bar{P}_2^{(2)} = -6 - 2\bar{P}_1(3 + \bar{P}_1) - 3\bar{P}_2 + \Delta, \quad (2.44)$$

$$6\bar{P}_2^{(3)} = \Delta(2 + 2\bar{P}_1 + \bar{P}_2) - 12 - 24\bar{P}_1 - 4\bar{P}_1^3 - 3\bar{P}_2(4 + \bar{P}_2) - 2\bar{P}_1\bar{P}_2(7 + \bar{P}_2) - 2\bar{P}_1^2(8 + \bar{P}_2), \quad (2.45)$$

$$24\bar{P}_2^{(4)} = \Delta[2\bar{P}_1^2 + (3 + \bar{P}_2)(2 + 2\bar{P}_1 + \bar{P}_2)] - 4\bar{P}_1^4 - 3(2 + \bar{P}_2)^2(3 + \bar{P}_2) - 2\bar{P}_1(3 + \bar{P}_2)^2(4 + \bar{P}_2) - 4\bar{P}_1^3(6 + \bar{P}_2) - \bar{P}_1^2(60 + 30\bar{P}_2 + 4\bar{P}_2^2), \quad (2.46)$$

где

$$\Delta = \sqrt{4(3 + \bar{P}_1(3 + \bar{P}_1))^2 + (3 + 2\bar{P}_1)^2\bar{P}_2(4 + \bar{P}_2)}. \quad (2.47)$$

Можно проверить, что $\bar{B}_1 < 0$ и $\bar{B}_2 < 0$ при $\bar{P}_1 < 0$, $\bar{P}_2 < 0$.

Случай G_2 . Если положить $\varepsilon = 1$ и:

$$(A_{ss'}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad (2.48)$$

также получаем интегрируемую конфигурацию, соответствующую алгебре Ли G_2 соответственно со степенями многочленов $(n_1, n_2) = (6, 10)$. Из (2.9), (2.14) и (2.48) получаем следующие соотношения для дилатонных констант связей:

$$\frac{1}{2} + \lambda_2^2 = 3\left(\frac{1}{2} + \lambda_1^2\right), \quad 1 - 2\lambda_1\lambda_2 = -\frac{1}{2} - \lambda_2^2. \quad (2.49)$$

Решая уравнения (2.49) мы получаем $(\lambda_1, \lambda_2) = \pm\left(\frac{5}{\sqrt{6}}, 3\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

В силу результатов работы [29] полиномы H_1 и H_2 могут быть рассчитаны с использованием так называемых флаксбранных полиномов, которые подчиняются уравнениям:

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{z}{H_s} \frac{d}{dz} H_s \right) = n_s p_s \prod_{l=1}^2 H_l^{-A_{sl}}, \quad (2.50)$$

с наложенными граничными условиями:

$$H_s(+0) = 1. \quad (2.51)$$

Для G_2 - случая эти полиномы имеют вид [51]:

$$H_1 = 1 + 6p_1 z + 15p_1 p_2 z^2 + 20p_1^2 p_2 z^3 + 15p_1^3 p_2 z^4 + 6p_1^3 p_2^2 z^5 + p_1^4 p_2^2 z^6, \quad (2.52)$$

$$H_2 = 1 + 10p_2 z + 45p_1 p_2 z^2 + 120p_1^2 p_2 z^3 + p_1^2 p_2 (135p_1 + 75p_2) z^4 + 252p_1^3 p_2^2 z^5 + p_1^3 p_2^2 (75p_1 + 135p_2) z^6 + 120p_1^4 p_2^3 z^7 + 45p_1^5 p_2^3 z^8 + 10p_1^6 p_2^3 z^9 + p_1^6 p_2^4 z^{10}. \quad (2.53)$$

Обозначим $f = f(z) = 1 - 2\mu z$, $z = \frac{1}{R}$. Тогда соотношения (2.10) можно переписать в виде

$$\frac{d}{df} \left(\frac{f}{H_s} \frac{d}{df} H_s \right) = B_s (2\mu)^{-2} \prod_{l=1}^2 H_l^{-A_{sl}}, \quad (2.54)$$

$B_s = -K_s Q_s^2$, $s = 1, 2$. Эти соотношения могут быть решены с помощью флаксбранных полиномов $H_s(f) = H_s(f; p)$, соответствующих матрице Картана 2×2 (A_{sl}), где $p = (p_1, p_2)$ - набор параметров. Здесь мы накладываем ограничения $p_s \neq 0$ для всех s .

Используя подход работы [29] (см. также [52]), положим

$$H_s(z) = \frac{H_s(f(z); p)}{H_s(1; p)}, \quad (2.55)$$

для $s = 1, 2$. Тогда выполняются соотношения (2.54) или, что то же самое, (2.10) выполняются тождественно, если [29]

$$n_s p_s \prod_{l=1}^2 (H_l(1; p))^{-A_{sl}} = B_s / (2\mu)^2, \quad (2.56)$$

$s = 1,2$; где $n_1 = 6$ и $n_2 = 10$.

Назовем набор параметров $p = (p_1, p_2)$ ($p_i \neq 0$) правильным, если [29]

$$H_s(f; p) > 0, \quad (2.57)$$

для всех $f \in [0,1]$ и $s = 1,2$. В дальнейшем мы будем рассматривать только правильные p . В соотношениях (2.56) $p_s < 0$ и $B_s < 0$ для $s = 1,2$.

Граничные условия (2.11) выполняются, поскольку

$$H_s((2\mu)^{-1} - 0) = \frac{1}{H_s(1; p)} > 0, \quad (2.58)$$

$s = 1,2$, а условия (2.12) выполняются именно в силу определения (2.39).

Локально при достаточно малых p_i соотношение (2.56) определяет однозначное соответствие между наборами параметров (p_1, p_2) и (Q_1^2, Q_2^2) , а набор (p_1, p_2) является правильным.

Специальное решение с зависимыми зарядами. Существует также специальное решение

$$H_s = \left(1 + \frac{P}{R}\right)^{b^s}, \quad (2.59)$$

с $P > 0$ удовлетворяющим

$$\frac{K_s}{b_s} Q_s^2 = P(P + 2\mu), \quad (2.60)$$

$s = 1,2$. Здесь $b^s \neq 0$ определено в (2.22). Это решение является специальным случаем более общих «блок-ортогональных» чернотранных решений [53-55].

Расчеты дают следующие соотношения:

$$b_s = \frac{2\lambda_{\bar{s}}}{\lambda_1 + \lambda_2} K_s, \quad (2.61)$$

$$Q_s^2 \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{2\lambda_{\bar{s}}} = P(P + 2\mu) = \frac{1}{2} Q^2, \quad (2.62)$$

где $s = 1,2$ и $\bar{s} = 2,1$, соответственно. Наше решение корректно определено, если $\lambda_1 \lambda_2 > 0$, т. е. две константы связи имеют одинаковый знак.

Для положительных корней (2.62)

$$P = P_+ = -\mu + \sqrt{\mu^2 + \frac{1}{2}Q^2}, \quad (2.63)$$

получаем при $R > 2\mu$ корректно определенное решение с асимптотически плоской метрикой и горизонтом при $R = 2\mu$, справедливое для обоих знаков $\varepsilon = \pm 1$.

Заменив радиальную переменную $r = R + P$, мы получим [32]

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega_2^2, \quad (2.64)$$

$$F^{(1)} = \frac{Q_1}{r^2} dt \wedge dr, \quad F^{(2)} = Q_2 \tau, \quad \varphi = 0, \quad (2.65)$$

где $f(r) = 1 - \frac{2GM}{r} + \frac{Q^2}{2r^2}$, $Q^2 = Q_1^2 + Q_2^2$ и $GM = P + \mu = \sqrt{\mu^2 + \frac{1}{2}Q^2} > \frac{1}{\sqrt{2}}|Q|$ и

$$Q_1^2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} Q^2, \quad Q_2^2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} Q^2. \quad (2.66)$$

Метрика в этих переменных совпадает с известной метрикой Рейснера-Нордстрема, определяемой двумя параметрами: $GM > 0$ и $Q^2 < 2(GM)^2$. В этом случае у нас есть два горизонта. Электрические и магнитные заряды не являются независимыми, но подчиняются уравнениям (2.66).

Случай $H_2(q, q)$. Следует отметить, что для случая:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \quad \lambda^2 = \frac{q+2}{2(q-2)}, \quad \varepsilon = -1 \quad (2.67)$$

$q = 2, 3, 4, \dots$, мы получаем специальное решение с $Q_1^2 = Q_2^2 = \frac{Q^2}{2}$ и матрицей:

$$(A_{SS'}) = \begin{pmatrix} 2 & -q \\ -q & 2 \end{pmatrix}, \quad (2.68)$$

которая является матрицей Картана гиперболической алгебры Каца-Мууди $H_2(q, q)$ ($q = 3, 4, 5, \dots$), см. [56] и ссылки там.

Предельные случаи A_1 . В дальнейшем мы будем использовать два предельных решения: электрическое с $Q_1 = Q \neq 0$ и $Q_2 = 0$,

$$H_1 = 1 + \frac{P_1}{R}, \quad H_2 = 1, \quad (2.69)$$

и магнитное с $Q_1 = 0$ и $Q_2 = Q \neq 0$,

$$H_1 = 1, \quad H_2 = 1 + \frac{P_2}{R}. \quad (2.70)$$

В обоих случаях $P_s = -\mu + \sqrt{\mu^2 + K_s Q^2}$. Эти решения соответствуют алгебре Ли A_1 . В различных обозначениях решение (2.69) появлялось ранее в [9,10,57], а на многомерный случай оно было распространено в [9,10,14,15]. Частный случай с $\lambda_1^2 = \frac{1}{2}$, $\varepsilon = 1$ рассматривался ранее в [6,11].

2.2 Модель дилатон-дионной черной дыры с двумя скалярными полями и двумя 2-формами

2.2.1 Действие модели

Наша модель с двумя скалярными полями, векторами дилатонной связи и двумя 2 - формами описывается следующим действием [58]:

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{|g|} \left\{ R[g] - g^{\mu\nu} \partial_\mu \vec{\varphi} \partial_\nu \vec{\varphi} - \frac{1}{2} e^{2\vec{\lambda}_1 \vec{\varphi}} F_{\mu\nu}^{(1)} F^{(1)\mu\nu} - \frac{1}{2} e^{2\vec{\lambda}_2 \vec{\varphi}} F_{\mu\nu}^{(2)} F^{(2)\mu\nu} \right\}. \quad (2.71)$$

Здесь первый член описывает гравитационное поле, второй – это кинетический член, описывающий скалярные поля, а третий и четвертый члены описывают абелевы калибровочные аналоги электромагнитного поля, промодулированные скалярными полями, где $g = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu \otimes dx^\nu$ - метрика, $|g| = |\det(g_{\mu\nu})|$, $\vec{\varphi} = (\varphi^1, \varphi^2)$ - вектор из скалярных полей, принадлежащий \mathbb{R}^2 , $F^{(i)} = dA^{(i)} = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^{(i)} dx^\mu \wedge dx^\nu$ - 2-форма с $A^{(i)} = A_\mu^{(i)} dx^\mu$, $i = 1, 2$, G - гравитационная постоянная, $\vec{\lambda}_1 = (\lambda_{1i}) \neq \vec{0}$, $\vec{\lambda}_2 = (\lambda_{2i}) \neq \vec{0}$ - векторы дилатонной связи, удовлетворяющие неравенству

$$\vec{\lambda}_1 \neq -\vec{\lambda}_2, \quad (2.72)$$

а $R[g]$ - скаляр Риччи. Здесь и далее мы положим $c = 1$ (где c - скорость света в вакууме).

2.2.2 Уравнения движения

Согласно формализму Лагранжа, чтобы получить уравнения движения гравитационного поля, необходимо проварьировать действие по метрике. Варьируя гравитационную часть действия по g , получим:

$$\begin{aligned} \delta S_g &= \delta \int \sqrt{|g|} R[g] d^D x = \delta \int \sqrt{|g|} R_{ij} g^{ij} d^D x = \\ &= \int \{ \sqrt{|g|} R_{ij} \delta g^{ij} + R \delta \sqrt{|g|} + \sqrt{|g|} g^{ij} \delta R_{ij} \} d^D x = 0. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Раскроем второе слагаемое в скобках [59]

$$\int R \delta \sqrt{|g|} d^D x = \int R \left(-\frac{1}{2} \sqrt{|g|} g_{ij} \delta g^{ij} \right) d^D x. \quad (2.74)$$

В [59] показано, что в выражении (2.73) третье слагаемое равно нулю. Здесь и ниже мы полагаем, что вариации всех полей имеют (связный) компактный носитель с гладкой границей, вне которого эти вариации обращаются в ноль.

Для вариации гравитационной части имеем выражение:

$$\delta S_g = \int \left(R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R \right) \delta g^{ij} \sqrt{|g|} d^D x. \quad (2.75)$$

Таким образом, мы получили левую часть уравнений Эйнштейна: $R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R$. Для получения правой части уравнений Эйнштейна, описывающих гравитационное поле, необходимо найти T_{MN} - тензор энергии-импульса. В данном случае он будет состоять из двух частей: скалярной и «электромагнитной». Проварьировав второе слагаемое действия (2.71) по g , найдем скалярную часть тензора энергии-импульса T_{MN}

$$\begin{aligned} & -\delta \int h_{\alpha\beta} g^{MN} \partial_M \varphi^\alpha \partial_N \varphi^\beta \sqrt{|g|} d^D x = \\ & = -h_{\alpha\beta} \int \left[\partial_M \varphi^\alpha \partial_N \varphi^\beta \sqrt{|g|} \delta g^{MN} + g^{MN} \partial_M \varphi^\alpha \partial_N \varphi^\beta \delta \sqrt{|g|} \right] d^D x = \\ & = -h_{\alpha\beta} \int \left(\partial_M \varphi^\alpha \partial_N \varphi^\beta - \frac{1}{2} g_{MN} g^{KL} \partial_K \varphi^\alpha \partial_L \varphi^\beta \right) \sqrt{|g|} \delta g^{MN} d^D x = \\ & = -h_{\alpha\beta} \int \left(\partial_M \varphi^\alpha \partial_N \varphi^\beta - \frac{1}{2} g_{MN} g^{KL} \partial_K \varphi^\alpha \partial_L \varphi^\beta \right) \sqrt{|g|} \delta g^{MN} d^D x, \end{aligned} \quad (2.76)$$

где здесь и ниже $h_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ - символ Кронекера. Соответственно,

$$T_{MN}[\varphi, g] = h_{\alpha\beta} \left(\partial_M \varphi^\alpha \partial_N \varphi^\beta - \frac{1}{2} g_{MN} g^{KL} \partial_K \varphi^\alpha \partial_L \varphi^\beta \right). \quad (2.77)$$

«Электромагнитная» часть тензора энергии-импульса T_{MN} будет вычисляться аналогично скалярной, но уже варьированием части действия (2.71), связанной с F^S по g

$$\begin{aligned} & \delta \int (F^S)^2 \sqrt{|g|} d^D x = \int \left[\sqrt{|g|} \delta (F^S)^2 + (F^S)^2 \delta \sqrt{|g|} \right] d^D x = \\ & = \int \left[2 F_{LM}^S F_{KN}^S g^{LK} \delta g^{MN} - \frac{1}{2} g_{MN} (F^S)^2 \delta g^{MN} \right] \sqrt{|g|} d^D x = \\ & = \int \left[2 F_{LM}^S F_{KN}^S g^{LK} - \frac{1}{2} g_{MN} (F^S)^2 \right] \sqrt{|g|} \delta g^{MN} d^D x. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Таким образом, часть тензора энергии-импульса, связанная с «электромагнитными» полями, будет иметь вид

$$T_{\mu\nu}[F, g, \varphi] = \sum_{s=1}^2 \exp[2\vec{\lambda}_s \vec{\varphi}] T_{MN}[F^s, g], \quad (2.79)$$

где

$$T_{MN}[F^s, g] = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} g_{MN} (F^s)^2 + 2F_{ML}^s F_N^{s,L} \right]. \quad (2.80)$$

Полный тензор энергии-импульса запишется как

$$T_{MN} = T_{MN}[\varphi, g] + \sum_{s=1}^2 \exp[2\vec{\lambda}_s \vec{\varphi}] T_{MN}[F^s, g], \quad (2.81)$$

а уравнения Эйнштейна имеют стандартный вид в наших обозначениях

$$R_{MN} - \frac{1}{2} g_{MN} R = T_{MN}. \quad (2.82)$$

Найдем полевые уравнения для скалярного поля. Для этого проварьируем скалярную часть действия по φ

$$\begin{aligned} \delta S_\varphi &= -\delta \int h_{\alpha\beta} g^{MN} \sqrt{|g|} \partial_M \varphi^\alpha \partial_N \varphi^\beta d^D x = \\ &= -\int 2h_{\alpha\beta} g^{MN} \sqrt{|g|} \partial_M \delta \varphi^\alpha \partial_N \varphi^\beta d^D x = \\ &= -\int 2h_{\alpha\beta} \left\{ \partial_M \left(g^{MN} \sqrt{|g|} \partial_N \varphi^\beta \delta \varphi^\alpha \right) \right. \\ &\quad \left. - \partial_M \left(g^{MN} \sqrt{|g|} \partial_N \varphi^\beta \right) \delta \varphi^\alpha \right\} d^D x. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Применяя теорему Стокса к первому слагаемому в фигурной скобке (2.83), получим, что оно дает нулевой вклад. Таким образом, остается слагаемое

$$2 \partial_M \left(g^{MN} h_{\alpha\beta} \sqrt{|g|} \partial_N \varphi^\beta \right). \quad (2.84)$$

Отнормируем данное выражение на $\sqrt{|g|}$ и свернем с обратной матрицей $h^{\alpha\beta}$. Получим

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_M \left(g^{MN} h_{\alpha\beta} \sqrt{|g|} \partial_N \varphi^\beta \right). \quad (2.85)$$

Теперь выражение (2.85) можно представить как

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_M \left(g^{MN} h_{\alpha\beta} \sqrt{|g|} \partial_N \varphi^\beta \right) = \Delta[g] \varphi^\alpha, \quad (2.86)$$

где $\Delta[g]$ - оператор Лапласа.

Но со скалярным полем связан еще один член в действии (2.71). Проварьируем его по φ

$$\begin{aligned} \delta S_{elm} &= -\delta \int \frac{1}{2} \sum_{s=1}^2 \exp[2\vec{\lambda}_s \vec{\varphi}] (F^s)^2 \sqrt{|g|} d^D x = \\ &= -\frac{1}{2} \int \sum_{s=1}^2 \delta[\exp[2\lambda_{s\alpha} \varphi^\alpha]] (F^s)^2 \sqrt{|g|} d^D x = \\ &= -\frac{1}{2} \int \sum_{s=1}^2 2\lambda_{s\alpha} \exp[2\vec{\lambda}_s \vec{\varphi}] (F^s)^2 \sqrt{|g|} \delta\varphi^\alpha d^D x. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Полная вариация действия по φ есть

$$\delta S = \int d^D x \sqrt{|g|} \{ 2h_{\alpha\beta} \Delta[g] \varphi^\beta - \lambda_{s\alpha} \exp[2\vec{\lambda}_s \vec{\varphi}] (F^s)^2 \} \delta\varphi^\alpha = 0. \quad (2.88)$$

Таким образом, уравнения, описывающие скалярное поле, будут выглядеть следующим образом:

$$\Delta[g] \varphi^\alpha - \sum_{s=1}^2 \frac{\lambda_s^\alpha}{2} \exp[2\vec{\lambda}_s \vec{\varphi}] (F^s)^2 = 0. \quad (2.89)$$

Получим уравнения для «электромагнитных» полей, проварьирав третье слагаемое действия (2.71) по A_μ ,

$$\begin{aligned} \delta S_{elm} &= - \int \frac{1}{2} \sum_{s=1}^2 \exp[2\vec{\lambda}_s \vec{\varphi}] \delta(F^s)^2 \sqrt{|g|} d^D x = \\ &= - \int \sum_{s=1}^2 \exp[2\vec{\lambda}_s \vec{\varphi}] F^{s,MN} \delta F_{MN}^s \sqrt{|g|} d^D x. \end{aligned} \quad (2.90)$$

Воспользовавшись определением

$$F_{MN}^s = \frac{\partial A_N^s}{\partial x^M} - \frac{\partial A_M^s}{\partial x^N}, \quad (2.91)$$

получим

$$\begin{aligned} & - \int \sum_{s=1}^2 \exp[2\vec{\lambda}_s \vec{\varphi}] F^{s,MN} \left(\frac{\partial}{\partial x^M} \delta A_N^s - \frac{\partial}{\partial x^N} \delta A_M^s \right) \sqrt{|g|} d^D x = \\ & = -2 \int \sum_{s=1}^2 \exp[2\vec{\lambda}_s \vec{\varphi}] F^{s,MN} \left(\frac{\partial}{\partial x^M} \delta A_N^s \right) \sqrt{|g|} d^D x. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Применяя формулу интегрирования по частям

$$\begin{aligned} & -2 \int \partial_M \left(\sqrt{|g|} \sum_{s=1}^2 \exp[2\vec{\lambda}_s \vec{\varphi}] F^{s,MN} \delta A_N^s \right) d^D x + \\ & + 2 \int \partial_M \left(\sqrt{|g|} \sum_{s=1}^2 \exp[2\vec{\lambda}_s \vec{\varphi}] F^{s,MN} \right) \delta A_N^s d^D x = 0. \end{aligned} \quad (2.93)$$

Первое слагаемое в полученном выражении равно нулю в силу теоремы Стокса, и тогда

$$2 \int \partial_M \left(\sqrt{|g|} \exp[2\vec{\lambda}_s \vec{\varphi}] F^{s,MN} \right) \delta A_N^s d^D x = 0. \quad (2.94)$$

Отнормируем это выражение на $\sqrt{|g|}$, получим

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_M \left(\sqrt{|g|} \exp[2\vec{\lambda}_s \vec{\varphi}] F^{s,MN} \right) = \nabla_M [g] (\exp[2\vec{\lambda}_s \vec{\varphi}] F^{s,MN}) = 0. \quad (2.95)$$

Соответственно, уравнения движения для «электромагнитных» полей запишутся как:

$$\nabla_M [g] (\exp[2\vec{\lambda}_s \vec{\varphi}] F^{s,MN}) = 0. \quad (2.96)$$

Выпишем полученные уравнения движения.

Уравнения Эйнштейна имеют следующий вид:

$$R_{MN} - \frac{1}{2} g_{MN} R = T_{MN}, \quad (2.97)$$

где T_{MN} - тензор энергии-импульса, описывающий полевые источники, состоит из двух частей

$$T_{MN} = T_{MN}[\varphi, g] + \sum_{s=1}^2 \exp[2\vec{\lambda}_s \vec{\varphi}] T_{MN}[F^s, g], \quad (2.98a)$$

$$(h_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta})$$

$$T_{MN}[\varphi, g] = h_{\alpha\beta} \left(\partial_M \varphi^\alpha \partial_N \varphi^\beta - \frac{1}{2} g_{MN} g^{KL} \partial_K \varphi^\alpha \partial_L \varphi^\beta \right), \quad (2.98b)$$

$$T_{MN}[F^s, g] = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} g_{MN} (F^s)^2 + 2F_{ML}^s F_N^{s,L} \right]. \quad (2.98b)$$

Уравнения типа (уравнений) Клейна-Гордона запишутся

$$\Delta[g]\varphi^\alpha - \sum_{s=1}^2 \frac{\lambda_s^\alpha}{2} \exp[2\vec{\lambda}_s \vec{\varphi}] (F^s)^2 = 0. \quad (2.99)$$

Уравнения типа (уравнений) Максвелла имеют вид

$$\nabla_M [g] (\exp[2\vec{\lambda}_s \vec{\varphi}] F^{s,MN}) = 0. \quad (2.100)$$

Проверка выполнения уравнений (2.97-2.100) для чернотырных решений, рассматривается далее.

2.2.3 Точное чернотырное решение

В настоящее время существует определенный интерес к сферически-симметричным решениям, например, к решениям для дилатонных черных дыр, см. [5,10,11,30,37,52,60] и ссылки там. Эти решения появляются в гравитационных моделях со скалярными полями и антисимметричными формами.

Здесь мы рассматриваем специальные дилатонные решения для черных дыр с электрическим и магнитным зарядами Q_1 и Q_2 соответственно, в 4-мерной модели с метрикой g , двумя скалярными полями $\varphi^1; \varphi^2$, двумя 2-формами $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$, соответствующими двум векторам констант дилатонной связи $\vec{\lambda}_1$ и $\vec{\lambda}_2$, принадлежащим \mathbb{R}^2 , соответственно. Все поля определены на ориентированном многообразии \mathcal{M} .

Здесь мы представляем решение черной дыры с дионоподобной конфигурацией для полей 2-форм:

$$F^{(1)} = Q_1 \tau_1, \quad F^{(2)} = Q_2 \tau_2, \quad (2.101)$$

где $\tau_2 = \text{vol}[S^2]$ —«магнитная» 2-форма, которая представляет собой объемную форму на двумерной сфере, а τ_1 - «электрическая» 2-форма на \mathcal{M} . (Мы называем эту несоставную (некомпозиционную) конфигурацию дионоподобной, в то время как исходная дионная конфигурация в теории с одной 2-формой F является составной (композиционной), т. е. $F = Q_1 \tau_1 + Q_2 \tau_2$.) В силу (1) мы имеем дело с заряженной черной дырой с двумя цветными зарядами: Q_1 и Q_2 . Заряд Q_1 - электрический, а заряд Q_2 - магнитный.

Дионоподобное чернотырное решение уравнений поля, соответствующих действию (2.1), определено на многообразии

$$\mathcal{M} = (2\mu, +\infty) \times S^2 \times \mathbb{R}, \quad (2.102)$$

и имеет следующий вид

$$ds^2 = H^a \left\{ -H^{-2a} \left(1 - \frac{2\mu}{R} \right) dt^2 + \frac{dR^2}{1 - \frac{2\mu}{R}} + R^2 d\Omega_2^2 \right\}, \quad (2.103)$$

$$\varphi^i = v^i \ln H, \quad (2.104)$$

$$F^1 = \frac{Q_1}{H^2 R^2} dt \wedge dR, \quad F^2 = Q_2 \tau. \quad (2.105)$$

Здесь Q_1 и Q_2 - (цветные) заряды, электрический и магнитный, соответственно, $\mu > 0$ - параметр экстремальности, $d\Omega_2^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ - каноническая метрика на единичной 2-мерной сфере S^2 ($0 < \theta < \pi, 0 < \phi < 2\pi$), $\tau = \sin \theta d\theta \wedge d\phi$ - стандартная форма объема на S^2 ,

$$H = 1 + \frac{P}{R}, \quad (2.106)$$

где $P > 0$, удовлетворяющее

$$P(P + 2\mu) = \frac{1}{2} Q^2, \quad (2.107)$$

$$P = -\mu + \sqrt{\mu^2 + \frac{1}{2} Q^2}, \quad (2.108)$$

$$a = \frac{(\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2)^2}{\Delta}, \quad (2.109)$$

$$v^i = \frac{\lambda_{1i}\vec{\lambda}_2(\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2) - \lambda_{2i}\vec{\lambda}_1(\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2)}{\Delta}, \quad (2.110)$$

$$\Delta = \frac{1}{2}(\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2)^2 + \vec{\lambda}_1^2\vec{\lambda}_2^2 - (\vec{\lambda}_1\vec{\lambda}_2)^2, \quad (2.111)$$

$i = 1, 2$, и

$$Q_1^2 = \frac{\vec{\lambda}_2(\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2)}{2\Delta} Q^2, \quad Q_2^2 = \frac{\vec{\lambda}_1(\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2)}{2\Delta} Q^2. \quad (2.112)$$

Здесь накладываются следующие дополнительные ограничения на векторы дилатонной связи:

$$\vec{\lambda}_i(\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2) > 0, \quad (2.113)$$

$i = 1, 2$.

В силу соотношений (2.112) и (2.113) Q_s^2 корректно определены. Отметим, что из ограничений (2.113) следуют соотношения $\vec{\lambda}_s \neq 0$, $s = 1, 2$, и соотношение (2.2).

Отметим, что

$$\Delta > 0 \quad (2.114)$$

справедливо для $\vec{\lambda}_1 \neq -\vec{\lambda}_2$. Действительно, в этом случае мы имеем сумму двух неотрицательных слагаемых в (2.111): $(\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2)^2 > 0$ и

$$C = \vec{\lambda}_1^2\vec{\lambda}_2^2 - (\vec{\lambda}_1\vec{\lambda}_2)^2 \geq 0 \quad (2.115)$$

в силу неравенства Коши-Шварца. Более того, $C = 0$ тогда и только тогда, когда векторы $\vec{\lambda}_1$ и $\vec{\lambda}_2$ коллинеарны. Из соотношения (2.115) следует

$$0 < a \leq 2. \quad (2.116)$$

Для неколлинеарных векторов $\vec{\lambda}_1$ и $\vec{\lambda}_2$ мы получаем $0 < a < 2$, в то время как $a = 2$ для коллинеарных векторов.

Это решение может быть проверено простой подстановкой в уравнения движения.

Вычисление скалярной кривизны для метрики $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ в (2.103) дает

$$R[g] = \frac{a(2-a)P^2(R-2\mu)}{2R^{4-a}(R+P)^{1+a}}. \quad (2.117)$$

Неколлинеарный случай. Для неколлинеарных векторов $\vec{\lambda}_1$ и $\vec{\lambda}_2$ ($0 < a < 2$) получаем

$$R[g] \rightarrow -\infty, \quad (2.118)$$

при $R \rightarrow +0$ и, следовательно, у нас имеется черная дыра с горизонтом при $R = 2\mu$ и сингулярностью при $R = +0$.

Коллинеарный случай. Для коллинеарных векторов $\vec{\lambda}_1$ и $\vec{\lambda}_2$, то есть, когда $\vec{\lambda}_1 = \vec{e}\lambda_1$, $\vec{\lambda}_2 = \vec{e}\lambda_2$ при $\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2 \neq 0$, получаем $v^i = 0$, $a = 2$ и

$$\begin{aligned} Q_1^2 &= \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} Q^2, \\ Q_2^2 &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} Q^2, \end{aligned} \quad (2.119)$$

где $\lambda_1\lambda_2 > 0$. Заменяя радиальную переменную, $R = r - P$, мы получаем слегка расширенный вариант решения из [32]

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega_2^2, \quad (2.120)$$

$$F^{(1)} = \frac{Q_1}{r^2} dt \wedge dr, F^{(2)} = Q_2 \tau, \vec{\varphi} = \vec{0}, \quad (2.121)$$

где

$$f(r) = 1 - \frac{2GM}{r} + \frac{Q^2}{2r^2}, \quad Q^2 = Q_1^2 + Q_2^2, \quad GM = P + \mu = \sqrt{\mu^2 + \frac{1}{2}Q^2} > \frac{1}{\sqrt{2}}|Q|.$$

Метрика в этих переменных совпадает с известной метрикой Рейснера-Нордстрема, определяемой двумя параметрами: $GM > 0$ и $Q^2 < 2(GM)^2$. В этом случае у нас есть два горизонта. Заметим, что электрические и магнитные заряды здесь не являются независимыми, но подчиняются уравнениям (2.119).

Проверка уравнения Эйнштейна. Запишем уравнения Эйнштейна (2.97)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = T_{\mu\nu}, \quad (2.122)$$

где $R_{\mu\nu}$ – тензор Риччи, $g_{\mu\nu}$ – метрический тензор, $T_{\mu\nu}$ – тензор энергии-импульса.

Теперь рассчитаем чему равна скалярная кривизна R . Для этого домножим уравнение (2.122) на $g^{\mu\nu}$ и просуммируем по индексам:

$$g^{\mu\nu} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}, \quad (2.123)$$

где $T_{\mu\nu}$ равно:

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}[\varphi, g] + T_{\mu\nu}[F, g, \varphi] = T_{\mu\nu}[\varphi, g] + \sum_{s=1}^2 e^{2\vec{\lambda}_s \vec{\varphi}} T_{\mu\nu}[F^s, g], \quad (2.124)$$

где $T_{\mu\nu}[\varphi, g] = \partial_\mu \vec{\varphi} \partial_\nu \vec{\varphi} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\bar{\mu}\bar{\nu}} \partial_{\bar{\mu}} \vec{\varphi} \partial_{\bar{\nu}} \vec{\varphi}$.

Тогда можно переписать

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= T_{\mu\nu}[\varphi, g] + \sum_{s=1}^2 e^{2\vec{\lambda}_s \vec{\varphi}} T_{\mu\nu}[F^s, g] = \\ &= \partial_\mu \vec{\varphi} \partial_\nu \vec{\varphi} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\bar{\mu}\bar{\nu}} \partial_{\bar{\mu}} \vec{\varphi} \partial_{\bar{\nu}} \vec{\varphi} + \sum_{s=1}^2 e^{2\vec{\lambda}_s \vec{\varphi}} T_{\mu\nu}[F^s, g]. \end{aligned} \quad (2.125)$$

Ниже мы используем тождество $g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}[F, g, \varphi] = 0$, следующее из

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}[F^s, g] &= g^{\mu\nu} \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} (F^s)^2 + 2 F_{\mu\rho}^s F_\nu^{s,\rho} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} (F^s)^2 + 2 g^{\mu\nu} F_{\mu\rho}^s F_\nu^{s,\rho} \right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} (F^s)^2 + 2 g^{\mu\nu} F_{\mu\rho}^s F_\nu^{s,\rho} \right) = \\ &= |g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = g_{\nu\mu} g^{\mu\nu} = \delta_\mu^\mu = 1 + 1 + 1 + 1 = 4| \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{4}{2} (F^s)^2 + 2 F_{\mu\rho}^s F^{s,\mu\rho} \right) = \frac{1}{2} (-2(F^s)^2 + 2(F^s)^2) = 0. \end{aligned} \quad (2.126)$$

Теперь уравнение (2.123) можно переписать в виде

$$g^{\mu\nu} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} R. \quad (2.127)$$

Покажем, что левая часть уравнения (2.123) равна $-R$

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} R = \\ &= \left| \begin{array}{l} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R \\ g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = g_{\nu\mu} g^{\mu\nu} = \delta_\mu^\mu = 1 + 1 + 1 + 1 = 4 \end{array} \right| = \\ &= R - \frac{1}{2} 4R = -R. \end{aligned} \quad (2.128)$$

Преобразуем правую часть уравнения (2.123):

$$\begin{aligned}
g^{\mu\nu} \left(\partial_\mu \vec{\varphi} \partial_\nu \vec{\varphi} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\bar{\mu}\bar{\nu}} \partial_{\bar{\mu}} \vec{\varphi} \partial_{\bar{\nu}} \vec{\varphi} \right) &= g^{\mu\nu} \partial_\mu \vec{\varphi} \partial_\nu \vec{\varphi} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} g^{\bar{\mu}\bar{\nu}} \partial_{\bar{\mu}} \vec{\varphi} \partial_{\bar{\nu}} \vec{\varphi} = \\
&= |g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = g_{\nu\mu} g^{\mu\nu} = \delta_\mu^\mu = 1 + 1 + 1 + 1 = 4| = \\
&= g^{\mu\nu} \partial_\mu \vec{\varphi} \partial_\nu \vec{\varphi} - \frac{4}{2} g^{\bar{\mu}\bar{\nu}} \partial_{\bar{\mu}} \vec{\varphi} \partial_{\bar{\nu}} \vec{\varphi} = g^{\mu\nu} \partial_\mu \vec{\varphi} \partial_\nu \vec{\varphi} - 2g^{\mu\nu} \partial_\mu \vec{\varphi} \partial_\nu \vec{\varphi} \\
&= -g^{\mu\nu} \partial_\mu \vec{\varphi} \partial_\nu \vec{\varphi}.
\end{aligned} \tag{2.129}$$

Подставим (2.128) и (2.129) в (2.127), тогда имеем

$$R = g^{\mu\nu} \partial_\mu \vec{\varphi} \partial_\nu \vec{\varphi}. \tag{2.130}$$

Теперь зная R , и подставив его значение, а также (2.125) в уравнение Эйнштейна (2.122) получим

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\bar{\mu}\bar{\nu}} \partial_{\bar{\mu}} \vec{\varphi} \partial_{\bar{\nu}} \vec{\varphi} = \partial_\mu \vec{\varphi} \partial_\nu \vec{\varphi} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\bar{\mu}\bar{\nu}} \partial_{\bar{\mu}} \vec{\varphi} \partial_{\bar{\nu}} \vec{\varphi} + \sum_{s=1}^2 e^{2\vec{\lambda}_s \vec{\varphi}} T_{\mu\nu}[F^s, g],$$

Отсюда имеем

$$R_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{\varphi} \partial_\nu \vec{\varphi} + T_{\mu\nu}[F, g, \varphi] = \partial_\mu \vec{\varphi} \partial_\nu \vec{\varphi} + \sum_{s=1}^2 e^{2\vec{\lambda}_s \vec{\varphi}} T_{\mu\nu}[F^s, g]. \tag{2.131}$$

Видно, что уравнение Эйнштейна свелось к значительно более простому выражению (2.131).

Так как φ зависит только от R , то, следовательно, при

$$\mu = \nu = t, \quad \partial_t \vec{\varphi} \partial_t \vec{\varphi} = 0, \tag{2.132}$$

$$\mu = \nu = R, \quad \partial_R \vec{\varphi} \partial_R \vec{\varphi} \neq 0, \tag{2.133}$$

$$\mu = \nu = \theta, \quad \partial_\theta \vec{\varphi} \partial_\theta \vec{\varphi} = 0, \tag{2.134}$$

$$\mu = \nu = \varphi, \quad \partial_\varphi \vec{\varphi} \partial_\varphi \vec{\varphi} = 0. \tag{2.135}$$

Проверим уравнение (2.131) для различных компонент $R_{\mu\nu}$.

При $\mu = \nu = t$ и учитывая (2.132) имеем

$$R_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{\varphi} \partial_\nu \vec{\varphi} + \sum_{s=1}^2 e^{2\vec{\lambda}_s \vec{\varphi}} T_{\mu\nu}[F^s, g] = \sum_{s=1}^2 e^{2\vec{\lambda}_s \vec{\varphi}} T_{\mu\nu}[F^s, g], \tag{2.136}$$

$$\begin{aligned}
T_{tt}[F^1, g, \varphi] &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} g_{tt} [(F_{tR}^1)^2 g^{tt} g^{RR} + (F_{Rt}^1)^2 g^{tt} g^{RR}] + 2F_{tR}^1 F_{tR}^1 g^{RR} \right] = \\
&= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} g_{tt} 2(F_{tR}^1)^2 g^{tt} g^{RR} + 2(F_{tR}^1)^2 g^{RR} \right] = \\
&= \frac{1}{2} [-(F_{tR}^1)^2 g^{RR} + 2(F_{tR}^1)^2 g^{RR}] = \frac{1}{2} (F_{tR}^1)^2 g^{RR} \\
&= \left| \begin{array}{c} F_{tR}^1 = \frac{Q_1}{H^2 R^2} \\ g^{RR} = (g_{RR})^{-1} = H^{-a} \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right) \end{array} \right| = \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{Q_1}{H^2 R^2} \right)^2 H^{-a} \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right) = \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{H^4 R^4} H^{-a} \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right), \tag{2.137}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{tt}[F^2, g, \varphi] &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} g_{tt} [(F_{\theta\varphi}^2)^2 g^{\theta\theta} g^{\varphi\varphi} + (F_{\varphi\theta}^2)^2 g^{\theta\theta} g^{\varphi\varphi}] + 0 \right] = \\
&= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} g_{tt} 2(F_{\theta\varphi}^2)^2 g^{\theta\theta} g^{\varphi\varphi} \right] = -\frac{1}{2} g_{tt} (F_{\theta\varphi}^2)^2 g^{\theta\theta} g^{\varphi\varphi} = \\
&= \left| \begin{array}{c} g_{tt} = -H^{-a} \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right) \\ F_{\theta\varphi}^2 = Q_2 \sin\theta \\ g^{\theta\theta} = (g_{\theta\theta})^{-1} = H^{-a} R^{-2} \\ g^{\varphi\varphi} = (g_{\varphi\varphi})^{-1} = H^{-a} R^{-2} \sin^{-2}\theta \end{array} \right| = \\
&= -\frac{1}{2} (Q_2 \sin\theta)^2 \left(-H^{-a} \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right) \right) H^{-a} R^{-2} H^{-a} R^{-2} \sin^{-2}\theta = \\
&= \frac{1}{2} Q_2^2 H^{-3a} \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right) R^{-4} = \frac{Q_2^2}{2H^{3a} R^4} \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right). \tag{2.138}
\end{aligned}$$

Вычислим правую часть (2.131)

$$\begin{aligned}
T_{tt}[F, g, \varphi] &= \sum_{s=1}^2 e^{2\vec{\lambda}_s \vec{\varphi}} T_{tt}[F^s, g] = e^{2\vec{\lambda}_1 \vec{\varphi}} T_{tt}[F^1, g] + e^{2\vec{\lambda}_2 \vec{\varphi}} T_{tt}[F^2, g] = \\
&= \left| \begin{array}{c} \varphi^i = v^i \ln H \\ v^i = \frac{\lambda_{1i} \vec{\lambda}_2 (\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2) - \lambda_{2i} \vec{\lambda}_1 (\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2)}{\Delta} \\ a = \frac{(\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2)^2}{\Delta} \\ \Delta = \frac{1}{2} (\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2)^2 + \vec{\lambda}_1^2 \vec{\lambda}_2^2 - (\vec{\lambda}_1 \vec{\lambda}_2)^2 \end{array} \right| =
\end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \vec{\lambda}_1 \vec{\varphi} = \frac{(\vec{\lambda}_1 \vec{\lambda}_1)(\vec{\lambda}_2 \vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2 \vec{\lambda}_2) - (\vec{\lambda}_1 \vec{\lambda}_2)(\vec{\lambda}_1 \vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_1 \vec{\lambda}_2)}{\Delta} \ln H = \\ \vec{\lambda}_2 \vec{\varphi} = \frac{(\vec{\lambda}_2 \vec{\lambda}_1)(\vec{\lambda}_2 \vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2 \vec{\lambda}_2) - (\vec{\lambda}_2 \vec{\lambda}_2)(\vec{\lambda}_1 \vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_1 \vec{\lambda}_2)}{\Delta} \ln H = \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \left[\frac{\vec{\lambda}_1^2 \vec{\lambda}_2^2 - (\vec{\lambda}_1 \vec{\lambda}_2)^2}{\Delta} \right] \ln H \\ \left[\frac{(\vec{\lambda}_1 \vec{\lambda}_2)^2 - \vec{\lambda}_1^2 \vec{\lambda}_2^2}{\Delta} \right] \ln H \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \vec{\lambda}_1 \vec{\varphi} + \vec{\lambda}_2 \vec{\varphi} = 0 \\ \vec{\lambda}_1 \vec{\varphi} = \frac{\Delta - \frac{1}{2}(\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2)^2}{\Delta} \ln H = \left(1 - \frac{a}{2}\right) \ln H = \\ \vec{\lambda}_2 \vec{\varphi} = \frac{\frac{1}{2}(\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2)^2 - \Delta}{\Delta} \ln H = \left(\frac{a}{2} - 1\right) \ln H \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} e^{2\vec{\lambda}_1 \vec{\varphi}} = e^{2\left(1 - \frac{a}{2}\right) \ln H} = H^{2-a} \\ e^{2\vec{\lambda}_2 \vec{\varphi}} = e^{2\left(\frac{a}{2} - 1\right) \ln H} = H^{a-2} \\ T_{tt}[F^1, g] = \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{H^4 R^4} H^{-a} \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right) = \\ T_{tt}[F^2, g] = \frac{Q_2^2}{2H^{3a} R^4} \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right) \end{cases} =$$

$$= H^{2-a} \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{H^4 R^4} H^{-a} \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right) + H^{a-2} \frac{Q_2^2}{2H^{3a} R^4} \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right) = \\ = \frac{Q_1^2}{2H^{2a+2} R^4} \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right) + \frac{Q_2^2}{2H^{2a+2} R^4} \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right) = \\ = (Q_1^2 + Q_2^2) \frac{1}{2H^{2a+2} R^4} \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \begin{array}{l} Q_1^2 = \frac{\vec{\lambda}_2(\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2)}{2\Delta} Q^2 \\ Q_2^2 = \frac{\vec{\lambda}_1(\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2)}{2\Delta} Q^2 \\ a = \frac{(\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2)^2}{\Delta} \\ Q_1^2 + Q_2^2 = \frac{\vec{\lambda}_2(\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2)}{2\Delta} Q^2 + \frac{\vec{\lambda}_1(\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2)}{2\Delta} Q^2 = \\ = Q^2 \frac{(\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2)^2}{2\Delta} = \frac{Q^2}{2} a = \left| P(P + 2\mu) = \frac{1}{2} Q^2 \right| = P(P + 2\mu)a \end{array} \right| = \\
&= P(P + 2\mu)a \frac{1}{2H^{2a+2}R^4} \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right). \tag{2.139}
\end{aligned}$$

В программном пакете **Mathematica** посчитали следующее значение для R_{tt}

$$\begin{aligned}
R_{tt} &= \frac{aP \left(\frac{P+R}{R}\right)^{-2a} (R - 2\mu)(P + 2\mu)}{2R^3(P + R)^2} = \frac{1}{2} Pa(P + 2\mu) \frac{\left(\frac{P+R}{R}\right)^{-2a} (R - 2\mu)}{R^3(P + R)^2} = \\
&= \frac{1}{2} Pa(P + 2\mu) \frac{H^{-2a}(R - 2\mu)}{R^3(P + R)^2} = \frac{1}{2} Pa(P + 2\mu) \frac{H^{-2a}}{R^2(P + R)^2} \frac{R - 2\mu}{R} = \\
&= \frac{1}{2} Pa(P + 2\mu) \frac{H^{-2a}}{R^2(P + R)^2} \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right) \\
&= \frac{1}{2} Pa(P + 2\mu) \frac{H^{-2a}}{R^4 \left(\frac{P+R}{R}\right)^2} \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right) = \frac{H^{-2a}}{R^4 H^2} \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right) = \\
&= \frac{1}{2} Pa(P + 2\mu) \frac{1}{R^4 H^{2a+2}} \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right). \tag{2.140}
\end{aligned}$$

Отсюда мы видим, что значения выражений (2.139) и (2.140) равны, то есть уравнение (2.131) удовлетворяется.

При $\mu = \nu = R$ имеем

$$\begin{aligned}
T_{RR} &= \partial_R \vec{\varphi} \partial_R \vec{\varphi} + \sum_{s=1}^2 e^{2\vec{\lambda}_s \vec{\varphi}} T_{RR}[F^s, g] = \\
&= (\partial_R \vec{\varphi})^2 + e^{2\vec{\lambda}_1 \vec{\varphi}} T_{RR}[F^1, g] + e^{2\vec{\lambda}_2 \vec{\varphi}} T_{RR}[F^2, g]. \tag{2.141}
\end{aligned}$$

Распишем более подробно $(\partial_R \vec{\varphi})^2$, $T_{RR}[F^1, g]$, $T_{RR}[F^2, g]$

$$(\partial_R \vec{\varphi})^2 = |\varphi = \nu \ln H| = (\partial_R(\nu \ln H))^2 = \nu^2 (\partial_R(\ln H))^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= |v^2 = a(2-a)| = a(2-a)(\partial_R(\ln H))^2 = a(2-a)(\partial_R(\ln H))^2 = \\
&= a(2-a) \left(\partial_R \left(\ln \left(1 + \frac{P}{R} \right) \right) \right)^2 = \frac{a(2-a)}{2} \frac{P^2}{\left(1 + \frac{P}{R}\right)^2 R^4} = \\
&= \frac{a(2-a)}{2} \frac{P^2}{(R+P)^2 R^2} = \frac{a(2-a)P^2}{2(R+P)^2 R^2}, \tag{2.142}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{RR}[F^1, g] &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} g_{RR} [(F_{tR}^1)^2 g^{tt} g^{RR} + (F_{Rt}^1)^2 g^{tt} g^{RR}] + 2F_{tR}^1 F_{tR}^1 g^{tt} \right] = \\
&= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} g_{RR} 2(F_{tR}^1)^2 g^{tt} g^{RR} + 2(F_{tR}^1)^2 g^{tt} \right] = \\
&= \frac{1}{2} [-(F_{tR}^1)^2 g^{tt} + 2(F_{tR}^1)^2 g^{tt}] = \frac{1}{2} (F_{tR}^1)^2 g^{tt} = \\
&= \left| \begin{array}{c} F_{tR}^1 = \frac{Q_1}{H^2 R^2} \\ g^{tt} = -H^a \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right)^{-1} \end{array} \right| = \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{Q_1}{H^2 R^2} \right)^2 \left(-H^a \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right)^{-1} \right) = -\frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{H^4 R^4} H^a \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right)^{-1} = \\
&= -\frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{H^{4-a} R^4} \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right)^{-1}, \tag{2.143}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{RR}[F^2, g] &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} g_{RR} [(F_{\theta\varphi}^2)^2 g^{\theta\theta} g^{\varphi\varphi} + (F_{\varphi\theta}^2)^2 g^{\theta\theta} g^{\varphi\varphi}] + 0 \right] = \\
&= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} g_{RR} 2(F_{\theta\varphi}^2)^2 g^{\theta\theta} g^{\varphi\varphi} \right] = -\frac{1}{2} g_{RR} (F_{\theta\varphi}^2)^2 g^{\theta\theta} g^{\varphi\varphi} = \\
&= \left| \begin{array}{c} F_{\theta\varphi}^2 = Q_2 \sin\theta \\ g_{RR} = H^a \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right)^{-1} \\ g^{\theta\theta} = H^{-a} R^{-2} \\ g^{\varphi\varphi} = H^{-a} R^{-2} \sin^{-2}\theta \end{array} \right| = \\
&= -\frac{1}{2} (Q_2 \sin\theta)^2 H^a \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right)^{-1} H^{-a} R^{-2} H^{-a} R^{-2} \sin^{-2}\theta = \\
&= -\frac{1}{2} Q_2^2 \sin^2\theta H^a \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right)^{-1} H^{-a} R^{-2} H^{-a} R^{-2} \sin^{-2}\theta \\
&= -\frac{1}{2} Q_2^2 \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right)^{-1} H^{-a} R^{-4} = -\frac{Q_2^2}{2H^a R^4} \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right)^{-1}, \tag{2.144}
\end{aligned}$$

$$\sum_{s=1}^2 e^{2\vec{\lambda}_s \vec{\varphi}} T_{RR}[F^s, g] = e^{2\vec{\lambda}_1 \vec{\varphi}} T_{RR}[F^1, g] + e^{2\vec{\lambda}_2 \vec{\varphi}} T_{RR}[F^2, g] =$$

$$\begin{aligned}
&= H^{2-a} \left(-\frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{H^{4-a} R^4} \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right)^{-1} \right) + H^{a-2} \left(-\frac{Q_2^2}{2H^a R^4} \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right)^{-1} \right) = \\
&= -\frac{Q_1^2}{2H^2 R^4} \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right)^{-1} - \frac{Q_2^2}{2H^2 R^4} \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right)^{-1} = -\frac{1}{2H^2 R^4} \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right)^{-1} \times \\
&\quad \times (Q_1^2 + Q_2^2) = -\frac{1}{2H^2 R^4} \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right)^{-1} P(P + 2\mu)a = \left| H = 1 + \frac{P}{R} \right| = \\
&= -\frac{1}{2 \left(1 + \frac{P}{R}\right)^2 R^4} \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right)^{-1} P(P + 2\mu)a = -\frac{P(P + 2\mu)a}{2(R + P)^2 R(R - 2\mu)}. \quad (2.145)
\end{aligned}$$

Подставим (2.142) и (2.145) в (2.141):

$$\begin{aligned}
(\partial_R \vec{\varphi})^2 + T_{RR}[F, g, \varphi] &= (\partial_R \vec{\varphi})^2 + \sum_{s=1}^2 e^{2\vec{\lambda}_s \vec{\varphi}} T_{RR}[F^s, g] = \\
&= \frac{a(2-a)P^2}{2(R+P)^2 R^2} - \frac{P(P+2\mu)a}{2(R+P)^2 R(R-2\mu)} = \\
&= \frac{a(2-a)P^2(R-2\mu) - P(P+2\mu)aR}{2(R+P)^2 R^2(R-2\mu)} = \\
&= \frac{-aP(P(2\mu-R)(2-a) + (P+2\mu)R)}{2(R+P)^2 R^2(R-2\mu)} = \\
&= \frac{-aP(2R\mu + PR + 2\mu P(2-a) - PR(2-a))}{2(R+P)^2 R^2(R-2\mu)} = \\
&= \frac{-aP(2R\mu + PR + 2\mu P(2-a) - 2PR + PRa)}{2(R+P)^2 R^2(R-2\mu)} = \\
&= \frac{-aP(2R\mu - PR + PRa + 2\mu P(2-a))}{2(R+P)^2 R^2(R-2\mu)} = \\
&= \frac{-aP(2R\mu - PR + PRa + 2\mu P(2-a))}{2(R+P)^2 R^2(R-2\mu)} = \\
&= \frac{-aP(2R\mu + P(Ra - R + 2\mu(2-a)))}{2(R+P)^2 R^2(R-2\mu)} = \\
&= \frac{-aP(2R\mu + P(R(a-1) + 2\mu(2-a)))}{2(R+P)^2 R^2(R-2\mu)}. \quad (2.146)
\end{aligned}$$

В **Mathematica** вычислили следующее значение для R_{RR} :

$$R_{RR} = \frac{-aP(2R\mu + P(R(a-1) + 2\mu(2-a)))}{2(R+P)^2 R^2(R-2\mu)}. \quad (2.147)$$

Видим, что значения выражений (2.146) и (2.147) равны, то есть уравнение (2.141) удовлетворяется.

При $\mu = \nu = \theta$, учитывая (2.134), получим

$$R_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{\varphi} \partial_\nu \vec{\varphi} + \sum_{s=1}^2 e^{2\vec{\lambda}_s \vec{\varphi}} T_{\mu\nu}[F^s, g] = \sum_{s=1}^2 e^{2\vec{\lambda}_s \vec{\varphi}} T_{\mu\nu}[F^s, g]. \quad (2.148)$$

Распишем более подробно $T_{\theta\theta}[F^1, g]$, $T_{\theta\theta}[F^2, g]$

$$\begin{aligned} T_{\theta\theta}[F^1, g] &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} g_{\theta\theta} [(F_{tR}^1)^2 g^{tt} g^{RR} + (F_{Rt}^1)^2 g^{tt} g^{RR}] + 0 \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} g_{\theta\theta} 2(F_{tR}^1)^2 g^{tt} g^{RR} \right] = -\frac{1}{2} (F_{tR}^1)^2 g_{\theta\theta} g^{tt} g^{RR} = \\ &= \left| \begin{array}{c} F_{tR}^1 = \frac{Q_1}{H^2 R^2} \\ g_{\theta\theta} = H^a R^2 \\ g^{tt} = -H^a \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right)^{-1} \\ g^{RR} = H^{-a} \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right) \end{array} \right| = \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{Q_1}{H^2 R^2} \right)^2 H^a R^2 \left(-H^a \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right)^{-1} \right) H^{-a} \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{H^4 R^4} H^a R^2 H^a \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right)^{-1} H^{-a} \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right) = \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{H^4 R^4} H^a R^2 = \\ &= \frac{Q_1^2}{2H^{-a+4}R^2}, \end{aligned} \quad (2.149)$$

$$\begin{aligned} T_{\theta\theta}[F^2, g] &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} g_{\theta\theta} [(F_{\theta\varphi}^2)^2 g^{\theta\theta} g^{\varphi\varphi} + (F_{\varphi\theta}^2)^2 g^{\theta\theta} g^{\varphi\varphi}] + 2F_{\theta\varphi}^2 F_{\varphi\theta}^2 g^{\varphi\varphi} \right] = \\ &= \left| \begin{array}{c} F_{\theta\varphi}^2 = -F_{\varphi\theta}^2 \\ (F_{\theta\varphi}^2)^2 = (F_{\varphi\theta}^2)^2 \end{array} \right| = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} g_{\theta\theta} 2(F_{\theta\varphi}^2)^2 g^{\theta\theta} g^{\varphi\varphi} + 2(F_{\theta\varphi}^2)^2 g^{\varphi\varphi} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[-(F_{\theta\varphi}^2)^2 g^{\varphi\varphi} + 2(F_{\theta\varphi}^2)^2 g^{\varphi\varphi} \right] = \frac{1}{2} (F_{\theta\varphi}^2)^2 g^{\varphi\varphi} = \\ &= \left| \begin{array}{c} F_{\theta\varphi}^2 = Q_2 \sin\theta \\ g^{\varphi\varphi} = H^{-a} R^{-2} \sin^{-2}\theta \end{array} \right| = \frac{1}{2} (Q_2 \sin\theta)^2 H^{-a} R^{-2} \sin^{-2}\theta = \\ &= \frac{1}{2} Q_2^2 \sin^2\theta H^{-a} R^{-2} \sin^{-2}\theta = \frac{Q_2^2}{2H^a R^2}. \end{aligned} \quad (2.150)$$

Подставим (2.149) и (2.150) в (2.148):

$$\begin{aligned}
T_{\theta\theta}[F, g, \varphi] &= \sum_{s=1}^2 e^{2\vec{\lambda}_s\vec{\varphi}} T_{\theta\theta}[F^s, g] = e^{2\vec{\lambda}_1\vec{\varphi}} T_{\theta\theta}[F^1, g] + e^{2\vec{\lambda}_2\vec{\varphi}} T_{\theta\theta}[F^2, g] = \\
&= \left| \begin{array}{l} e^{2\vec{\lambda}_1\vec{\varphi}} = H^{2-a} \\ e^{2\vec{\lambda}_2\vec{\varphi}} = H^{a-2} \end{array} \right| = H^{2-a} \frac{Q_1^2}{2H^{-a+4}R^2} + H^{a-2} \frac{Q_2^2}{2H^a R^2} = \\
&= \frac{Q_1^2}{2H^2 R^2} + \frac{Q_2^2}{2H^2 R^2} = \frac{1}{2H^2 R^2} (Q_1^2 + Q_2^2) \\
&= \left| \begin{array}{l} Q_1^2 = \frac{\vec{\lambda}_2(\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2)}{2\Delta} Q^2 \\ Q_2^2 = \frac{\vec{\lambda}_1(\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2)}{2\Delta} Q^2 \\ a = \frac{(\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2)^2}{\Delta} \\ P(P + 2\mu) = \frac{1}{2} Q^2 \end{array} \right| = \\
&= \frac{P(P + 2\mu)a}{2H^2 R^2} = \left| H = 1 + \frac{P}{R} \right| = \frac{P(P + 2\mu)a}{2(P + R)^2}. \tag{2.151}
\end{aligned}$$

В **Mathematica** вычислили следующее значение для $R_{\theta\theta}$:

$$R_{\theta\theta} = \frac{P(P + 2\mu)a}{2(P + R)^2}. \tag{2.152}$$

Видим, что значения выражений (2.151) и (2.152) равны, то есть уравнение (2.131) удовлетворяется.

При $\mu = \nu = \varphi$ и учитывая (2.135) имеем:

$$R_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{\varphi} \partial_\nu \vec{\varphi} + \sum_{s=1}^2 e^{2\vec{\lambda}_s\vec{\varphi}} T_{\mu\nu}[F^s, g] = \sum_{s=1}^m e^{2\vec{\lambda}_s\vec{\varphi}} T_{\mu\nu}[F^s, g], \tag{2.153}$$

$$\begin{aligned}
T_{\varphi\varphi}[F^1, g] &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} g_{\varphi\varphi} [(F_{tR}^1)^2 g^{tt} g^{RR} + (F_{Rt}^1)^2 g^{tt} g^{RR}] + 0 \right] = \\
&= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} g_{\varphi\varphi} 2(F_{tR}^1)^2 g^{tt} g^{RR} \right] = -\frac{1}{2} (F_{tR}^1)^2 g_{\varphi\varphi} g^{tt} g^{RR} = \\
&= \left| \begin{array}{l} F_{tR}^1 = \frac{Q_1}{H^2 R^2} \\ g_{\varphi\varphi} = H^a R^2 \sin^2 \theta \\ g^{tt} = -H^a \left(1 - \frac{2\mu}{R} \right)^{-1} \\ g^{RR} = H^{-a} \left(1 - \frac{2\mu}{R} \right) \end{array} \right| =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \left(\frac{Q_1}{H^2 R^2} \right)^2 H^a R^2 \sin^2 \theta \left(-H^a \left(1 - \frac{2\mu}{R} \right)^{-1} \right) H^{-a} \left(1 - \frac{2\mu}{R} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{H^4 R^4} H^a R^2 \sin^2 \theta H^a \left(1 - \frac{2\mu}{R} \right)^{-1} H^{-a} \left(1 - \frac{2\mu}{R} \right) = \quad (2.154) \\
&= \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{H^4 R^4} H^a R^2 \sin^2 \theta = \frac{Q_1^2}{2H^{-a+4}R^2} \sin^2 \theta.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{\varphi\varphi}[F^2, g] &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} g_{\varphi\varphi} \left[(F_{\theta\varphi}^2)^2 g^{\theta\theta} g^{\varphi\varphi} + (F_{\varphi\theta}^2)^2 g^{\theta\theta} g^{\varphi\varphi} \right] + 2F_{\theta\varphi}^2 F_{\varphi\theta}^2 g^{\theta\theta} \right] = \\
&= \left| \begin{array}{l} F_{\theta\varphi}^2 = -F_{\varphi\theta}^2 \\ (F_{\theta\varphi}^2)^2 = (F_{\varphi\theta}^2)^2 \end{array} \right| = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} g_{\varphi\varphi} 2(F_{\theta\varphi}^2)^2 g^{\theta\theta} g^{\varphi\varphi} + 2(F_{\theta\varphi}^2)^2 g^{\theta\theta} \right] = \\
&= \frac{1}{2} \left[-(F_{\theta\varphi}^2)^2 g^{\theta\theta} + 2(F_{\theta\varphi}^2)^2 g^{\theta\theta} \right] = \frac{1}{2} (F_{\theta\varphi}^2)^2 g^{\theta\theta} = \\
&= \left| \begin{array}{l} F_{\theta\varphi}^2 = Q_2 \sin \theta \\ g^{\theta\theta} = (g_{\theta\theta})^{-1} = H^{-a} R^{-2} \end{array} \right| = \frac{1}{2} (Q_2 \sin \theta)^2 H^{-a} R^{-2} = \quad (2.155) \\
&= \frac{1}{2} Q_2^2 \sin^2 \theta H^{-a} R^{-2} = \frac{Q_2^2}{2H^a R^2} \sin^2 \theta.
\end{aligned}$$

Подставим (2.154) и (2.155) в (2.153), получим

$$\begin{aligned}
T_{\varphi\varphi}[F, g, \varphi] &= \sum_{s=1}^2 e^{2\vec{\lambda}_s \vec{\varphi}} T_{\varphi\varphi}[F^s, g] = e^{2\vec{\lambda}_1 \vec{\varphi}} T_{\varphi\varphi}[F^1, g] + e^{2\vec{\lambda}_2 \vec{\varphi}} T_{\varphi\varphi}[F^2, g] = \\
&= \left| \begin{array}{l} e^{2\vec{\lambda}_1 \vec{\varphi}} = H^{2-a} \\ e^{2\vec{\lambda}_2 \vec{\varphi}} = H^{a-2} \end{array} \right| = H^{2-a} \frac{Q_1^2}{2H^{-a+4}R^2} \sin^2 \theta + H^{a-2} \frac{Q_2^2}{2H^a R^2} \sin^2 \theta = \\
&= \frac{Q_1^2 \sin^2 \theta}{2H^2 R^2} + \frac{Q_2^2 \sin^2 \theta}{2H^2 R^2} = \frac{\sin^2 \theta}{2H^2 R^2} (Q_1^2 + Q_2^2) = \\
&= \left| \begin{array}{l} Q_1^2 = \frac{\vec{\lambda}_2 (\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2)}{2\Delta} Q^2 \\ Q_2^2 = \frac{\vec{\lambda}_1 (\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2)}{2\Delta} Q^2 \\ a = \frac{(\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2)^2}{\Delta} \\ P(P + 2\mu) = \frac{1}{2} Q^2 \end{array} \right| = \\
&= \frac{\sin^2 \theta P(P + 2\mu) a}{2H^2 R^2} = \left| H = 1 + \frac{P}{R} \right| = \frac{P(P + 2\mu) a \sin^2 \theta}{2(P + R)^2}. \quad (2.156)
\end{aligned}$$

В **Mathematica** вычислили следующее значение для $R_{\varphi\varphi}$:

$$R_{\varphi\varphi} = \frac{P(P + 2\mu)asin^2\theta}{2(P + R)^2}. \quad (2.157)$$

Видим, что значения выражений (2.156) и (2.157) равны, то есть уравнение (2.131) удовлетворяется.

Проверка уравнения типа Клейна-Гордона. Запишем уравнение типа Клейна-Гордона (2.99):

$$\Delta\varphi^i = \sum_{s=1}^2 \frac{\lambda_{si}}{2} e^{2\vec{\lambda}_s\vec{\varphi}} (F^{(s)})^2. \quad (2.158)$$

Вычислим левую часть уравнения (2.158):

$$\begin{aligned} \Delta\varphi^i &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu (\sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi^i) = \left| \begin{array}{l} g = \det(g_{\mu\nu}) = H^{2a} R^4 \sin^2\theta \\ \mu = \nu = R \\ g^{\mu\nu} = g^{RR} \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{H^a R^2 \sin\theta} \partial_R (H^a R^2 \sin\theta g^{RR} \partial_\nu \varphi^i) = \left| g^{RR} = H^{-a} \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right) \right| = \\ &= \frac{1}{H^a R^2} \partial_R \left(R^2 \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right) v^i \frac{\partial_R H}{H} \right) = \left| \begin{array}{l} H = 1 + \frac{P}{R} \\ \partial_R H = -\frac{P}{R^2} \end{array} \right| = \\ &= \frac{v^i}{H^a R^2} \frac{d}{dR} \left(R^2 \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right) \frac{(-1) P}{H R^2} \right) = -\frac{P v^i}{H^a R^2} \frac{d}{dR} \left(\frac{\left(1 - \frac{2\mu}{R}\right)}{\left(1 + \frac{P}{R}\right)} \right) = \\ &= -\frac{P v^i}{H^a R^2} \left[\frac{\frac{2\mu}{R^2}}{1 + \frac{P}{R}} - \frac{\left(1 - \frac{2\mu}{R}\right) \left(-\frac{P}{R^2}\right)}{\left(1 + \frac{P}{R}\right)^2} \right] = \\ &= -\frac{P v^i}{H^a R^2} \left[\frac{2\mu}{R^2} \left(1 + \frac{P}{R}\right) + \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right) \frac{P}{R^2} \right] = -\frac{P(P + 2\mu)v^i}{H^{a+2} R^4}. \quad (2.159) \end{aligned}$$

Вычислим правую часть уравнения (2.158):

$$\sum_{s=1}^2 \frac{\lambda_{si}}{2} e^{2\vec{\lambda}_s\vec{\varphi}} (F^{(s)})^2 = \frac{1}{2} (F^{(1)})^2 \lambda_{1i} e^{2\vec{\lambda}_1\vec{\varphi}} + \frac{1}{2} (F^{(2)})^2 \lambda_{2i} e^{2\vec{\lambda}_2\vec{\varphi}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \begin{array}{l} (F^{(1)})^2 = 2g^{tt} g^{RR} F_{tR}^{(1)} F_{tR}^{(1)} \\ (F^{(2)})^2 = 2g^{\theta\theta} g^{\varphi\varphi} F_{\theta\varphi}^{(2)} F_{\theta\varphi}^{(2)} \\ F_{tR}^{(1)} = -F_{Rt}^{(1)} = \frac{Q_1}{H^2 R^2} \\ F_{\theta\varphi}^{(2)} = -F_{\varphi\theta}^{(2)} = Q_2 \sin\theta \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} g^{tt} = (g_{tt})^{-1} = -H^a \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right)^{-1} \\ g^{RR} = (g_{RR})^{-1} = H^{-a} \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right) \\ g^{\theta\theta} = (g_{\theta\theta})^{-1} = H^{-a} R^{-2} \\ g^{\varphi\varphi} = (g_{\varphi\varphi})^{-1} = H^{-a} R^{-2} \sin^{-2}\theta \end{array} \right| = \\
&= \left| \begin{array}{l} (F^{(1)})^2 = -2H^a \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right)^{-1} H^{-a} \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right) (F_{tR}^{(1)})^2 = -2 \frac{Q_1^2}{H^4 R^4} \\ (F^{(2)})^2 = 2H^{-a} R^{-2} H^{-a} R^{-2} \sin^{-2}\theta (F_{\theta\varphi}^{(2)})^2 = 2 \frac{Q_2^2}{H^{2a} R^4} \end{array} \right| = \\
&= -\frac{Q_1^2}{H^4 R^4} e^{2\vec{\lambda}_1 \vec{\varphi}} \lambda_{1i} + \frac{Q_2^2}{H^{2a} R^4} e^{2\vec{\lambda}_2 \vec{\varphi}} \lambda_{2i} = \\
&= \left| \begin{array}{l} e^{2\vec{\lambda}_1 \vec{\varphi}} = e^{2\left(1-\frac{a}{2}\right)\ln H} = H^{2-a} \\ e^{2\vec{\lambda}_2 \vec{\varphi}} = e^{2\left(\frac{a}{2}-1\right)\ln H} = H^{a-2} \end{array} \right| = \\
&= -\frac{Q_1^2}{H^4 R^4} H^{2-a} \lambda_{1i} + \frac{Q_2^2}{H^{2a} R^4} H^{a-2} \lambda_{2i} = -\frac{Q_1^2}{H^{a+2} R^4} \lambda_{1i} + \frac{Q_2^2}{H^{a+2} R^4} \lambda_{2i} = \\
&= -\frac{1}{H^{a+2} R^4} (Q_1^2 \lambda_{1i} - Q_2^2 \lambda_{2i}) = \\
&= -\frac{1}{H^{a+2} R^4} \left[\frac{\vec{\lambda}_2 (\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2)}{2\Delta} Q^2 \lambda_{1i} - \frac{\vec{\lambda}_1 (\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2)}{2\Delta} Q^2 \lambda_{2i} \right] = \\
&= -\frac{1}{H^{a+2} R^4} \frac{Q^2}{2} \frac{\lambda_{1i} \vec{\lambda}_2 (\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2) - \lambda_{2i} \vec{\lambda}_1 (\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2)}{\Delta} = \\
&= \left| \begin{array}{l} P(P + 2\mu) = \frac{1}{2} Q^2 \\ v^i = \frac{\lambda_{1i} \vec{\lambda}_2 (\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2) - \lambda_{2i} \vec{\lambda}_1 (\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2)}{\Delta} \end{array} \right| = \\
&= -\frac{1}{H^{a+2} R^4} P(P + 2\mu) v^i = -\frac{P(P + 2\mu) v^i}{H^{a+2} R^4}. \tag{2.160}
\end{aligned}$$

Видим, что значения выражений (2.159) и (2.160) равны, то есть уравнение типа Клейна-Гордона (2.99) выполняется.

Проверка уравнений типа Максвелла. Запишем уравнения типа Максвелла (2.100):

$$\nabla_\mu \left(e^{2\vec{\lambda}_i \vec{\varphi}} F^{(i)\mu\nu} \right) = 0. \tag{2.161}$$

Мы знаем, что левая часть равна [61]:

$$\nabla_\mu \left(e^{2\vec{\lambda}_i \vec{\varphi}} F^{(i)\mu\nu} \right) = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu \left(\sqrt{|g|} e^{2\vec{\lambda}_i \vec{\varphi}} F^{(i)\mu\nu} \right). \tag{2.162}$$

$$= -\partial_t \left(H^{2-a} H^a R^2 \sin\theta \frac{Q_1}{H^2 R^2} \right) = -\partial_t (Q_1 \sin\theta) = 0, \quad (2.164)$$

так как выражение в скобках от t не зависит.

При $\nu = \theta$ имеем:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left(\sqrt{|g|} e^{2\vec{\lambda}_2 \vec{\varphi}} F^{(2)\mu\nu} \right) &= \partial_\mu \left(\sqrt{|g|} e^{2\vec{\lambda}_2 \vec{\varphi}} F^{(2)\mu\theta} \right) = \partial_\varphi \left(\sqrt{|g|} e^{2\vec{\lambda}_2 \vec{\varphi}} F^{(2)\varphi\theta} \right) = \\ &= \left| \begin{array}{l} F^{(2)\varphi\theta} = g^{\theta\theta} g^{\varphi\varphi} F_{\varphi\theta}^{(2)} = -g^{\theta\theta} g^{\varphi\varphi} F_{\theta\varphi}^{(2)} \\ \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} g^{\theta\theta} = \frac{1}{g_{\theta\theta}} = H^{-a} R^{-2} \\ g^{\varphi\varphi} = \frac{1}{g_{\varphi\varphi}} = H^{-a} R^{-2} \sin^{-2}\theta \\ F_{\varphi\theta}^{(2)} = -F_{\theta\varphi}^{(2)} = -Q_2 \sin\theta \end{array} \right| = \\ &= -H^{-a} R^{-2} H^{-a} R^{-2} \sin^{-2}\theta Q_2 \sin\theta = -H^{-2a} R^{-4} \frac{1}{\sin\theta} Q_2 \Big| = \\ &= \left| \begin{array}{l} g = \det(g_{\mu\nu}) = H^{2a} R^4 \sin^2\theta \\ e^{2\vec{\lambda}_2 \vec{\varphi}} = H^{a-2} \end{array} \right| = -\partial_\varphi \left(H^{a-2} H^a R^2 \sin\theta H^{-2a} R^{-4} \frac{1}{\sin\theta} Q_2 \right) = \\ &= -\partial_\varphi (H^{-2} R^{-2} Q_2) = 0, \quad (2.165) \end{aligned}$$

так как выражение в скобках от φ не зависит.

При $\nu = \varphi$ имеем:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left(\sqrt{|g|} e^{2\vec{\lambda}_2 \vec{\varphi}} F^{(2)\mu\nu} \right) &= \partial_\mu \left(\sqrt{|g|} e^{2\vec{\lambda}_2 \vec{\varphi}} F^{(2)\mu\varphi} \right) = \partial_\theta \left(\sqrt{|g|} e^{2\vec{\lambda}_2 \vec{\varphi}} F^{(2)\theta\varphi} \right) = \\ &= \left| \begin{array}{l} F^{(2)\theta\varphi} = g^{\theta\theta} g^{\varphi\varphi} F_{\theta\varphi}^{(2)} \\ \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} g^{\theta\theta} = \frac{1}{g_{\theta\theta}} = H^{-a} R^{-2} \\ g^{\varphi\varphi} = \frac{1}{g_{\varphi\varphi}} = H^{-a} R^{-2} \sin^{-2}\theta \\ F_{\theta\varphi}^{(2)} = Q_2 \sin\theta \end{array} \right| = \\ &= H^{-a} R^{-2} H^{-a} R^{-2} \sin^{-2}\theta Q_2 \sin\theta = H^{-2a} R^{-4} \frac{1}{\sin\theta} Q_2 \Big| = \\ &= \left| \begin{array}{l} g = \det(g_{\mu\nu}) = H^{2a} R^4 \sin^2\theta \\ e^{2\vec{\lambda}_2 \vec{\varphi}} = H^{a-2} \end{array} \right| = \end{aligned}$$

$$= \partial_{\theta} \left(H^{a-2} H^a R^2 \sin\theta H^{-2a} R^{-4} \frac{1}{\sin\theta} Q_2 \right) = \partial_{\theta} (H^{-2} R^{-2} Q_2) = 0, \quad (2.166)$$

так как выражение в скобках от θ не зависит.

Видим, что значения выражений (2.163 - 2.166) равны нулю, то есть уравнения типа Максвелла (2.100) выполняются.

3 ФИЗИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ ДИЛАТОН-ДИОННОЙ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ.

В предыдущей главе мы ознакомились с основными свойствами решений двух моделей дилатон-дионной черной дыры. Здесь мы рассмотрим физические свойства этих двух моделей.

3.1 Физические параметры дилатон-дионной черной дыры с одним скалярным полем и двумя 2-формами

АДМ масса и скалярный заряд. Для гравитационной АДМ массы из (2.4) получаем

$$GM = \mu + \frac{1}{2}(h_1 P_1 + h_2 P_2), \quad (3.1)$$

где параметры $P_s = P_s^{(1)}$ появляются в уравнении (2.25) а G - гравитационная постоянная.

Скалярный заряд просто следует из (2.5)

$$Q_\varphi = \varepsilon(\lambda_1 h_1 P_1 - \lambda_2 h_2 P_2). \quad (3.2)$$

Для специального решения (2.59) при $P > 0$ получаем

$$GM = \mu + P = \sqrt{\mu^2 + Q^2}, \quad Q_\varphi = 0. \quad (3.3)$$

При фиксированных зарядах Q_s и параметре экстремальности μ масса M и скалярный заряд Q_φ не являются независимыми, а подчиняются определенному ограничению. Действительно, при фиксированных параметрах $P_s = P_s^{(1)}$ в (2.25) получаем

$$y^s = \ln H_s = \frac{P_s}{2\mu} z + O(z^2), \quad (3.4)$$

при $z \rightarrow +0$, что после подстановки в (2.18) дает (при $z = 0$) следующее тождество:

$$\frac{1}{2} \sum_{s,l=1,2} h_s A_{sl} P_s P_l + 2\mu \sum_{s=1,2} h_s P_s = \sum_{s=1,2} Q_s^2. \quad (3.5)$$

Используя уравнения (3.1) и (3.2) это тождество можно переписать в следующем виде:

$$2(GM)^2 + \varepsilon Q_\varphi^2 = Q_1^2 + Q_2^2 + 2\mu^2. \quad (3.6)$$

Замечательно, что эта формула не содержит λ . Отметим, что в экстремальном случае $\mu = +0$ это соотношение при $\varepsilon = 1$ было получено ранее в [60].

Температура Хокинга и энтропия. Температура Хокинга, соответствующая решению, равна

$$T_H = \frac{1}{8\pi\mu} H_{10}^{-h_1} H_{20}^{-h_2}, \quad (3.7)$$

где H_{s0} определены в (2.11). Здесь и далее мы полагаем $c = \hbar = \kappa = 1$.

Для специальных решений (2.59) при $P > 0$ получаем

$$T_H = \frac{1}{8\pi\mu} \left(1 + \frac{P}{2\mu}\right)^{-2}. \quad (3.8)$$

В этом случае температура Хокинга T_H не зависит от λ_s и ε , когда μ и P (или Q^2) фиксированы.

Энтропия Бекенштейна-Хокинга (ареальная) $S = \frac{A}{4G}$, соответствующая горизонту при $R = 2\mu$, где A - площадь горизонта, выглядит следующим образом:

$$S_{BH} = \frac{4\pi\mu^2}{G} H_{10}^{h_1} H_{20}^{h_2}. \quad (3.9)$$

Из (3.7) и (3.9) следует, что произведение

$$T_H S_{BH} = \frac{\mu}{2G} \quad (3.10)$$

не зависит от λ_s , ε и зарядов Q_s . Это произведение не использует явную форму модульных функций $H_s(R)$.

Используя (3.6) и (3.10), мы получаем соотношение Смарра

$$2(GM)^2 + \varepsilon Q_\phi^2 = Q_1^2 + Q_2^2 + 8(GT_H S_{BH})^2. \quad (3.11)$$

ППН параметры. Вводя новую радиальную переменную по соотношению $R = \rho(1 + (\mu/2\rho))^2$ ($\rho > \mu/2$), мы получаем трехмерную конформно-плоскую форму метрики (2.4)

$$g = U \left\{ -U_1 \frac{(1 - (\mu/2\rho))^2}{(1 + (\mu/2\rho))^2} dt \otimes dt + \left(1 + \frac{\mu}{2\rho}\right)^4 \delta_{ij} dx^i \otimes dx^j \right\}, \quad (3.12)$$

где $\rho^2 = |x|^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j$ ($i, j = 1, 2, 3$) и

$$U = \prod_{s=1,2} H_s^{h_s},$$

$$U_1 = \prod_{s=1,2} H_s^{-2h_s}. \quad (3.13)$$

Параметризованные постньютоновские (ППН) параметры β и γ определяются следующими стандартными соотношениями:

$$g_{00} = -(1 - 2V + 2\beta V^2) + O(V^3), \quad (3.14)$$

$$g_{ij} = \delta_{ij}(1 + 2\gamma V) + O(V^2), \quad (3.15)$$

$i, j = 1, 2, 3$, где $V = \frac{GM}{\rho}$ — потенциал Ньютона, G — гравитационная постоянная и M — гравитационная масса (для нашего случая см. (3.1)).

Вычисления ППН параметров (или параметров Эддингтона) для метрики (3.12) дают [32]:

$$\beta = 1 + \frac{1}{4(GM)^2} (Q_1^2 + Q_2^2), \quad \gamma = 1. \quad (3.16)$$

Эти параметры не зависят от λ_s и ε . Их можно вычислить, не зная явных соотношений для модульных функций $H_s(R)$.

Эти параметры (по крайней мере, формально) подчиняются наблюдательным ограничениям для Солнечной системы [62], когда $Q_s/(2GM)$ достаточно малы.

Ограничения на массу и скалярный заряд. Здесь мы представим следующую гипотезу, которая подтверждается некоторыми численными расчетами [31,35]. Для $h_1 = h_2$ эта гипотеза была предложена в работе [31].

Гипотеза. Для любых $h_1 > 0$, $h_2 > 0$, $\varepsilon = \pm 1$, $Q_1 \neq 0$, $Q_2 \neq 0$ и $\mu > 0$: (A) модульные функции $H_s(R)$, которые подчиняются (2.10), (2.11) и (2.12), определены однозначно и, следовательно, параметры P_1 , P_2 , гравитационная масса M и скалярный заряд Q_ϕ также определены однозначно; (B) параметры P_1 , P_2 положительны и функции $P_1 = P_1(Q_1^2, Q_2^2)$, $P_2 = P_2(Q_1^2, Q_2^2)$ определяют диффеоморфизм \mathbf{R}_+^2 ($\mathbf{R}_+ = \{x|x > 0\}$); (C) в предельном случае имеем: (i) для

$Q_2^2 \rightarrow +0$: $P_1 \rightarrow -\mu + \sqrt{\mu^2 + K_1 Q_1^2}$, $P_2 \rightarrow +0$ и (ii) для $Q_1^2 \rightarrow +0$: $P_1 \rightarrow +0$, $P_2 \rightarrow -\mu + \sqrt{\mu^2 + K_2 Q_2^2}$.

Гипотезу легко проверить для $(A_1 + A_1)$ -случая $\varepsilon = 1$, $\lambda_1 \lambda_2 = \frac{1}{2}$. Другой интегрируемый A_2 -случай $\varepsilon = 1$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $\lambda^2 = \frac{3}{2}$ более сложен [35].

Определим $h_{min} = \min(h_1, h_2)$, $h_{max} = \max(h_1, h_2)$, и $|\lambda|_{max} = \max(|\lambda|_1, |\lambda|_2)$; тогда мы получаем $h_{min} = \left(\frac{1}{2} + |\lambda|_{max}^2\right)^{-1}$ для $\varepsilon = +1$ и $h_{max} = \left(\frac{1}{2} - |\lambda|_{max}^2\right)^{-1}$ для $\varepsilon = -1$.

Из Гипотезы вытекает следующее предложение.

Предложение 2 [32]. В рамках условий Предложения 1 из [32] для всех $\mu > 0$ справедливы следующие ограничения на массу и скалярный заряд:

$$\frac{1}{2} \sqrt{h_{min}(Q_1^2 + Q_2^2)} < GM, \quad (3.17)$$

$$|Q_\varphi| < |\lambda|_{max} \sqrt{h_{min}(Q_1^2 + Q_2^2)} \quad (3.18)$$

для $\varepsilon = +1$ ($0 < h_s < 2$), и

$$\sqrt{\frac{1}{2}(Q_1^2 + Q_2^2)} < GM, \quad (3.19)$$

$$|Q_\varphi| < |\lambda|_{max} \sqrt{h_{max}(Q_1^2 + Q_2^2)} \quad (3.20)$$

для $\varepsilon = -1$ ($h_s < 2$).

В [31] Предложение доказано для случая $\lambda_1 = \lambda_2$ ($h_1 = h_2$). В этом случае оценка (3.17) совпадает (с точностью до обозначений) с оценкой (6.16) из работы [13] (BPS-подобное неравенство), которое было доказано там с помощью некоторых спинорных методов.

Отметим, что здесь мы имели дело с особым классом решений с фантомным скалярным полем ($\varepsilon = -1$). Даже в предельном случае $Q_2 = +0$ и $Q_1 \neq 0$ существуют решения для фантомных черных дыр, которые не охватываются нашим анализом, см. ссылки [63,64].

Когда один из параметров h_s , скажем, h_1 , отрицателен, гипотеза недействительна. В этом можно убедиться, просто проанализировав решения с достаточно малым зарядом Q_2 .

3.2 Физические параметры дилатон-дионной черной дыры с двумя скалярными полями и двумя 2-формами

3.2.1 Гравитационная масса и скалярные заряды

Определение гравитационной массы ADM получается из (2.103) в режиме слабого поля сравнением с [61]:

$$g_{00} = -(1 - 2GM/R + o(1/R)). \quad (3.21)$$

Теперь выпишем g_{00} из (2.103):

$$\begin{aligned} g_{00} &= -H^{-a} \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right) = -\left(1 + \frac{P}{R}\right)^{-a} \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right) \\ &\approx -\left(1 - \frac{aP}{R}\right) \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Приравнивая (3.21) и (3.22) найдем GM :

$$-\left(1 - \frac{aP}{R}\right) \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right) = -\left(1 - \frac{2GM}{R} + o\left(\frac{1}{R}\right)\right), \quad (3.23)$$

$$1 - \frac{2\mu}{R} - \frac{aP}{R} - \frac{2\mu aP}{R^2} = 1 - \frac{2GM}{R} + o\left(\frac{1}{R}\right),$$

$$1 - \frac{2\mu}{R} - \frac{aP}{R} = 1 - \frac{2GM}{R},$$

$$\frac{2GM}{R} = \frac{2\mu}{R} + \frac{aP}{R},$$

$$2GM = 2\mu + aP,$$

$$GM = \mu + \frac{aP}{2}. \quad (3.24)$$

Таким образом мы получили формулу для GM .

В свою очередь, вектор скалярного заряда $\vec{Q}_\varphi = (Q_\varphi^1, Q_\varphi^2)$ получается из (2.104) в режиме слабого поля с использованием следующего определения: $\varphi^i = \frac{Q_\varphi^i}{R} + o\left(\frac{1}{R}\right)$:

$$\vec{Q}_\varphi = \vec{v}P, \quad (3.25)$$

где вектор \vec{v} задается формулой (2.110).

Комбинируя соотношения (3.24) и (.25), получаем следующее тождество:

$$2(GM)^2 + \vec{Q}_\varphi^2 = Q_1^2 + Q_2^2 + 2\mu^2. \quad (3.26)$$

Эта формула не содержит векторов $\vec{\lambda}_s$.

Тождество (3.26) можно проверить, используя (2.109), (2.112) и следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \vec{v}^2 &= \frac{(\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2)^2 (\vec{\lambda}_1^2 \vec{\lambda}_2^2 - (\vec{\lambda}_1 \vec{\lambda}_2)^2)}{\Delta^2} = \\ &= \frac{a(2-a)}{2}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Для дальнейшего анализа удобно ввести следующие безразмерные параметры:

$$\begin{aligned} p &= \frac{P}{\mu}, \\ q &= \frac{|Q|}{GM}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Мы получаем

$$f_*(p, a) = \frac{p(p+2)}{\left(1 + \frac{a}{2}p\right)^2} = \frac{q^2}{2}. \quad (3.29)$$

Функция $f_*(p, a)$ монотонно возрастает по p на промежутке $(0, +\infty)$ для любого $a \in (0, 2]$, поскольку

$$\frac{\partial}{\partial p} f_* = \frac{16 \left[\left(1 + \frac{a}{2}p\right) + 1 \right]}{(2 + ap)^3} > 0. \quad (3.30)$$

В силу (3.29) и

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} f_*(p, a) = \frac{4}{a^2},$$

соотношение (3.29) определяет взаимно однозначное соответствие между $p \in (0, +\infty)$ и $q \in \left(0, \frac{2\sqrt{2}}{a}\right)$ для любого (фиксированного) $a \in (0, 2]$. Таким образом, мы имеем:

$$\begin{aligned} 0 < q^2 < \frac{8}{a^2}, \\ 0 < Q^2 < \frac{8}{a^2}(GM)^2. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Обратное отображение $p(q) = p(q, a)$ определяется для любого $a \in (0, 2]$ следующим образом

$$p = \frac{8 \sqrt{\frac{1}{2}(1-a)q^2 + 1 + 2aq^2} - 8}{8 - a^2q^2}. \quad (3.32)$$

Ограничение на массу. Здесь мы сформулируем следующее предложение.

Предложение. Пусть $Q_1 \neq 0$, $Q_2 \neq 0$ и $\mu > 0$. Тогда следующие оценки массы имеют вид справедливо для всех $\mu > 0$, $P > 0$ и $\vec{\lambda}_s$, удовлетворяющих (2.113):

$$\frac{1}{2} \sqrt{h_m(Q_1^2 + Q_2^2)} < GM. \quad (3.33)$$

Здесь $h_m = \left(\frac{1}{2} + |\vec{\lambda}|_{max}^2\right)^{-1}$, где $|\vec{\lambda}|_{max} = \max(|\vec{\lambda}|_1, |\vec{\lambda}|_2)$.

Доказательство. Неравенство (3.33) можно записать в виде:

$$h_m(Q_1^2 + Q_2^2) < 2(GM)^2 = (2\mu + aP)^2. \quad (3.34)$$

В силу соотношений (2.107), (2.109) и (2.112) получаем:

$$(Q_1^2 + Q_2^2) = \frac{(\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2)^2}{2\Delta} Q^2 = aP(P + 2\mu). \quad (3.35)$$

Следовательно, неравенство (3.34) имеет вид:

$$h_m aP(P + 2\mu) < (2\mu + aP)^2, \quad (3.36)$$

или, что то же самое:

$$(a - h_m)aP^2 + 2\mu a(2 - h_m)P + 4\mu^2 > 0. \quad (3.37)$$

Это соотношение выполняется в силу неравенств: а) $0 < h_m < 2$ и б) $h_m < a$. Первое неравенство тривиально, а второе можно легко проверить. Предложение доказано.

В случае коллинеарных векторов $\vec{\lambda}_1$ и $\vec{\lambda}_2$ ($\vec{\lambda}_1 \neq -\vec{\lambda}_2$) предложение было фактически доказано (с точностью до некоторой гипотезы) для общей

постановки задачи в [32]. Случай $\vec{\lambda}_1 = \vec{\lambda}_2$ рассматривался ранее в [31], а также в [13] (неравенство типа BPS (Богомольного-Прасада-Зоммерфельда)), где ограничение на массу было доказано в общей постановке задачи с использованием определенных спинорных методов.

3.2.2 Постньютоновские параметры

Вводя новую радиальную переменную ρ соотношением $R = \rho(1 + (\mu/2\rho))^2$ ($\rho > \mu/2$), получаем параметризацию метрики (2.103), имеющую 3-мерное конформно-плоское сечение:

$$g = H^a \left\{ -H^{-2a} \frac{(1 - (\mu/2\rho))^2}{(1 + (\mu/2\rho))^2} dt \otimes dt + \left(1 + \frac{\mu}{2\rho}\right)^4 \delta_{ij} dx^i \otimes dx^j \right\}, \quad (3.38)$$

где $\rho^2 = |x|^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j$ ($i, j = 1, 2, 3$).

Параметризованные постньютоновские (ППН) параметры β и γ определяются следующими стандартными соотношениями:

$$g_{00} = -(1 - 2V + 2\beta V^2) + O(V^3), \quad (3.39)$$

$$g_{ij} = \delta_{ij}(1 + 2\gamma V) + O(V^2), \quad (3.40)$$

($i, j = 1, 2, 3$), где $V = GM/\rho$ ньютоновский потенциал, G - гравитационная постоянная, а M - гравитационная масса (для нашего случая см. (3.24)).

Расчеты ППН параметров (или параметров Эддингтона) для метрики (3.38) дают:

ППН β можно найти из формулы (3.39):

$$\begin{aligned} g_{00} &= -(1 - 2V + 2\beta V^2) + O(V^3) = \\ &= \left| V = \frac{GM}{\rho} \right| = -1 + \frac{2GM}{\rho} - \frac{2G^2 M^2}{\rho^2} \beta. \end{aligned} \quad (3.41)$$

В формуле (3.41) сделаем следующие замены

$$\begin{aligned} R &= \rho \left(1 + \frac{\mu}{2\rho}\right)^2, \\ \rho &= \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned}
g_{00} &= -H^{-a} \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right) = \left| \begin{array}{l} H = 1 + \frac{P}{R} \\ R = \rho \left(1 + \frac{\mu}{2\rho}\right)^2 \end{array} \right| = \\
&= -\left(1 + \frac{P}{R}\right)^{-a} \left(1 - \frac{2\mu}{\rho \left(1 + \frac{\mu}{2\rho}\right)^2}\right) = \\
&= \left| \rho \left(1 + \frac{2\mu}{\rho}\right)^2 - 2\mu = \rho \left(1 + \frac{\mu}{\rho} + \frac{\mu^2}{4\rho^2}\right) - 2\mu = \rho \left(1 - \frac{\mu}{\rho} + \frac{\mu^2}{4\rho^2}\right) = \right. \\
&= \left. \rho \left(1 - \frac{\mu}{2\rho}\right)^2 \right| = -\left(1 + \frac{P}{R}\right)^{-a} \frac{\rho \left(1 - \frac{\mu}{2\rho}\right)^2}{\rho \left(1 + \frac{\mu}{2\rho}\right)^2} = \\
&= -\left(1 + \frac{P}{R}\right)^{-a} \frac{\left(1 - \frac{\mu}{2\rho}\right)^2}{\left(1 + \frac{\mu}{2\rho}\right)^2} \tag{3.42} \\
&= -\left(1 + \frac{P}{\rho \left(1 + \frac{\mu}{2\rho}\right)^2}\right)^{-a} \frac{\left(1 - \frac{\mu}{2\rho}\right)^2}{\left(1 + \frac{\mu}{2\rho}\right)^2} = \left| \rho = \frac{1}{x} \right| = \\
&= -\left(1 + \frac{Px}{\left(1 + \frac{\mu x}{2}\right)^2}\right)^{-a} \frac{\left(1 - \frac{\mu x}{2}\right)^2}{\left(1 + \frac{\mu x}{2}\right)^2}.
\end{aligned}$$

Далее для удобства заменим в (3.42):

$$c = H^{-a} = \left(1 + \frac{Px}{\left(1 + \frac{\mu x}{2}\right)^2}\right)^{-a}, \tag{3.43}$$

$$d = -\frac{\left(1 - \frac{\mu x}{2}\right)^2}{\left(1 + \frac{\mu x}{2}\right)^2}. \tag{3.44}$$

Теперь сделаем следующие вычисления:

$$\begin{aligned}
g_{00}|_{x \rightarrow 0} + g'_{00}|_{x \rightarrow 0}x + g''_{00}|_{x \rightarrow 0}\frac{x^2}{2!} &= \\
&= g_{00}|_{x \rightarrow 0} + \left. \frac{dg_{00}}{dx} \right|_{x \rightarrow 0} x + \left. \frac{d^2g_{00}}{dx^2} \right|_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2!}.
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Вычислим отдельно каждое слагаемое в (3.45):

$$g_{00}|_{x \rightarrow 0} = (cd)|_{x \rightarrow 0} = \left(- \left(1 + \frac{Px}{\left(1 + \frac{\mu x}{2}\right)^2} \right)^{-a} \frac{\left(1 - \frac{\mu x}{2}\right)^2}{\left(1 + \frac{\mu x}{2}\right)^2} \right) \Bigg|_{x \rightarrow 0} = -1, \tag{3.46}$$

$$\begin{aligned}
g'_{00}|_{x \rightarrow 0} &= (cd)'|_{x \rightarrow 0} = (c'd + cd')|_{x \rightarrow 0} = \\
&= \left[\begin{array}{l} c' = -a \left(1 + \frac{Px}{\left(1 + \frac{\mu x}{2}\right)^2} \right)^{-a-1} \left(-\frac{Px\mu}{\left(1 + \frac{\mu x}{2}\right)^3} + \frac{P}{\left(1 + \frac{\mu x}{2}\right)^2} \right) \\ d' = \frac{\mu \left(1 - \frac{\mu x}{2}\right)}{\left(1 + \frac{\mu x}{2}\right)^2} + \frac{\mu \left(1 - \frac{\mu x}{2}\right)^2}{\left(1 + \frac{\mu x}{2}\right)^3} \end{array} \right] = \\
&= \left[\begin{array}{l} c'|_{x \rightarrow 0} = -aP \\ d'|_{x \rightarrow 0} = 2\mu \\ c|_{x \rightarrow 0} = 1 \\ d|_{x \rightarrow 0} = -1 \end{array} \right] = -aP(-1) + 2\mu = aP + 2\mu = \\
&= \left[\begin{array}{l} GM = \mu + \frac{aP}{2} \\ aP = 2(GM - \mu) \end{array} \right] = 2(GM - \mu) + 2\mu = 2GM,
\end{aligned} \tag{3.47}$$

$$\begin{aligned}
g''_{00}|_{x \rightarrow 0} &= (cd)''|_{x \rightarrow 0} = (c''d + 2c'd' + cd'')|_{x \rightarrow 0} = \\
&= \left[\begin{array}{l} c'' = -a(-a-1) \left(1 + \frac{Px}{\left(1 + \frac{\mu x}{2}\right)^2} \right)^{-a-2} \left(-\frac{Px\mu}{\left(1 + \frac{\mu x}{2}\right)^3} + \frac{P}{\left(1 + \frac{\mu x}{2}\right)^2} \right)^2 \\ -a \left(1 + \frac{Px}{\left(1 + \frac{\mu x}{2}\right)^2} \right)^{-a-1} \left(\frac{3Px\mu^2}{2\left(1 + \frac{\mu x}{2}\right)^4} - \frac{2P\mu}{\left(1 + \frac{\mu x}{2}\right)^3} \right) \\ d'' = -\frac{3\mu^2 \left(1 - \frac{\mu x}{2}\right)^2}{2\left(1 + \frac{\mu x}{2}\right)^4} - \frac{2\mu^2 \left(1 - \frac{\mu x}{2}\right)}{\left(1 + \frac{\mu x}{2}\right)^3} - \frac{\mu^2}{2\left(1 + \frac{\mu x}{2}\right)^2} \end{array} \right] =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \begin{array}{l} c''|_{x \rightarrow 0} = a(a+1)P^2 + 2aP\mu \\ d''|_{x \rightarrow 0} = -4\mu^2 \end{array} \right| = (a(a+1)P^2 + 2aP\mu)(-1) + \\
&+ 2(-aP)2\mu + (-4\mu^2) = -a(a+1)P^2 - 2aP\mu - 4aP\mu - 4\mu^2 = \\
&-a(a+1)P^2 - 6aP\mu - 4\mu^2 = \left| \begin{array}{l} P(P+2\mu) = \frac{Q^2}{2} \\ P^2 = \frac{Q^2}{2} - 2P\mu \end{array} \right| = -a(a+1) \left(\frac{Q^2}{2} - \right. \quad (3.48) \\
&\left. - 2P\mu \right) - 6aP\mu - 4\mu^2 = -a(a+1) \left(\frac{Q^2}{2} - 2P\mu \right) - 6aP\mu - 4\mu^2 = \\
&-a(a+1) \frac{Q^2}{2} - 2aP\mu(2-a) - 4\mu^2.
\end{aligned}$$

Вычислим каждый член в (3.48) по отдельности:

$$\begin{aligned}
-2a(2-a)P\mu &= \left| \begin{array}{l} P = \frac{2GM + \sqrt{2}\sqrt{2G^2M^2 + Q^2 - aQ^2}}{2(a-1)} \\ \mu = GM - \frac{a}{2} \frac{2GM + \sqrt{2}\sqrt{2G^2M^2 + Q^2 - aQ^2}}{2(a-1)} \end{array} \right| = \\
&= -2a(2-a) \frac{2GM + \sqrt{2}\sqrt{2G^2M^2 + Q^2 - aQ^2}}{2(a-1)} \times \\
&\times \left(GM - \frac{a}{2} \frac{2GM + \sqrt{2}\sqrt{2G^2M^2 + Q^2 - aQ^2}}{2(a-1)} \right) = \\
&= -2a(2-a) \frac{(2GM + \sqrt{2}\sqrt{2G^2M^2 + Q^2 - aQ^2})}{8(a-1)^2} \times \\
&\times \left(4GM(a-1) - a(2GM + \sqrt{2}\sqrt{2G^2M^2 + Q^2 - aQ^2}) \right) = \\
&= -2a(2-a) \left(\frac{(2GM + \sqrt{2}\sqrt{2G^2M^2 + Q^2 - aQ^2}) 4GM(a-1)}{8(a-1)^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{a(2GM + \sqrt{2}\sqrt{2G^2M^2 + Q^2 - aQ^2})^2}{8(a-1)^2} \right) = \\
&= -2a(2-a) \left(\frac{(2GM + \sqrt{2}\sqrt{2G^2M^2 + Q^2 - aQ^2})(4GMa - 4GM)}{8(a-1)^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{a(4G^2M^2 + 4\sqrt{2}GM\sqrt{2G^2M^2 + Q^2 - aQ^2} + 2(2G^2M^2 + Q^2 - aQ^2))}{8(a-1)^2} \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -2a(2-a) \left(\frac{8aG^2M^2 + 4\sqrt{2}aGM\sqrt{2G^2M^2 + Q^2 - aQ^2} - 8G^2M^2}{8(a-1)^2} \right. \\
&\quad - \frac{4\sqrt{2}GM\sqrt{2G^2M^2 + Q^2 - aQ^2}}{8(a-1)^2} \\
&\quad \left. + \frac{-4aG^2M^2 - 4\sqrt{2}aGM\sqrt{2G^2M^2 + Q^2 - aQ^2} - 4aG^2M^2 - 2aQ^2 + 2a^2Q^2}{8(a-1)^2} \right) = \\
&= -2a(2-a) \frac{-8G^2M^2 - 4\sqrt{2}GM\sqrt{2G^2M^2 + Q^2 - aQ^2} - 2aQ^2 + 2a^2Q^2}{8(a-1)^2} = \\
&= -2a(2-a) \frac{-4GM(2GM + \sqrt{2}\sqrt{2G^2M^2 + Q^2 - aQ^2}) + 2aQ^2(-1+a)}{8(a-1)^2} = \\
&= -2a(2-a) \frac{-2GM(2GM + \sqrt{2}\sqrt{2G^2M^2 + Q^2 - aQ^2}) + aQ^2(-1+a)}{4(a-1)^2} = \\
&= \frac{8aG^2M^2 - 4a^2G^2M^2 + 2a^2Q^2 - 3a^3Q^2 + a^4Q^2}{2(a-1)^2} \\
&\quad + \frac{4\sqrt{2}aGM\sqrt{2G^2M^2 + Q^2 - aQ^2} - 2\sqrt{2}a^2GM\sqrt{2G^2M^2 + Q^2 - aQ^2}}{2(a-1)^2}, \tag{3.49}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-4\mu^2 &= -4 \left(GM - \frac{a}{2} \frac{2GM + \sqrt{2}\sqrt{2G^2M^2 + Q^2 - aQ^2}}{2(a-1)} \right)^2 = \\
&= -4 \frac{\left(4GM(a-1) - 2aGM - \sqrt{2}a\sqrt{2G^2M^2 + Q^2 - aQ^2} \right)^2}{16(a-1)^2} = \\
&= - \frac{\left(-2GM(2-a) - \sqrt{2}a\sqrt{2G^2M^2 + Q^2 - aQ^2} \right)^2}{4(a-1)^2} = \\
&= - \frac{16G^2M^2 - 16aG^2M^2 + 4a^2G^2M^2 + 8aGM\sqrt{2}\sqrt{2G^2M^2 + Q^2 - aQ^2}}{4(a-1)^2} \\
&\quad - \frac{-4a^2GM\sqrt{2}\sqrt{2G^2M^2 + Q^2 - aQ^2} + 2a^2(2G^2M^2 + Q^2 - aQ^2)}{4(a-1)^2} = \\
&= \frac{-16G^2M^2 + 16aG^2M^2 - 8a^2G^2M^2 - 2a^2Q^2 + 2a^3Q^2}{4(a-1)^2} \\
&\quad + \frac{-8\sqrt{2}aGM\sqrt{2G^2M^2 + Q^2 - aQ^2} + 4\sqrt{2}a^2GM\sqrt{2G^2M^2 + Q^2 - aQ^2}}{4(a-1)^2}, \tag{3.50}
\end{aligned}$$

$$-a(a+1)\frac{Q^2}{2} - 2aP\mu(2-a) - 4\mu^2 = -a(a+1)\frac{Q^2}{2} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{8aG^2M^2 - 4a^2G^2M^2 + 2a^2Q^2 - 3a^3Q^2 + a^4Q^2}{2(a-1)^2} + \\
& + \frac{4\sqrt{2}aGM\sqrt{2G^2M^2 + Q^2 - aQ^2} - 2\sqrt{2}a^2GM\sqrt{2G^2M^2 + Q^2 - aQ^2}}{2(a-1)^2} + \\
& + \frac{-16G^2M^2 + 16aG^2M^2 - 8a^2G^2M^2 - 2a^2Q^2 + 2a^3Q^2}{4(a-1)^2} + \\
& + \frac{-8\sqrt{2}aGM\sqrt{2G^2M^2 + Q^2 - aQ^2} + 4\sqrt{2}a^2GM\sqrt{2G^2M^2 + Q^2 - aQ^2}}{4(a-1)^2} = \\
& = -a(a+1)\frac{Q^2}{2} \\
& + \frac{32aG^2M^2 - 16a^2G^2M^2 + 2a^2Q^2 - 4a^3Q^2 + 2a^4Q^2 - 16G^2M^2}{4(a-1)^2} = \\
& = -a(a+1)\frac{Q^2}{2} + \frac{16G^2M^2(2a - a^2 - 1) + 2a^2Q^2(1 - 2a + a^2)}{4(a-1)^2} = \quad (3.51) \\
& = -a(a+1)\frac{Q^2}{2} + \frac{(a-1)^2(2a^2Q^2 - 16G^2M^2)}{4(a-1)^2} = \\
& = -a(a+1)\frac{Q^2}{2} + \frac{a^2Q^2}{2} - 4G^2M^2 = -\frac{aQ^2}{2} - 4G^2M^2.
\end{aligned}$$

Подставим (3.49), (3.50) и (3.51) в (3.48):

$$\begin{aligned}
g_{00}|_{x \rightarrow 0} + g'_{00}|_{x \rightarrow 0}x + g''_{00}|_{x \rightarrow 0}\frac{x^2}{2!} &= \\
&= -1 + 2GMx + \left(-\frac{aQ^2}{2} - 4G^2M^2\right)\frac{x^2}{2!} = \\
&= -1 + 2GM\frac{1}{\rho} + \left(-\frac{aQ^2}{2} - 4G^2M^2\right)\frac{1}{2!\rho^2} = \\
&= \frac{-4\rho^2 + 8\rho GM - aQ^2 - 8G^2M^2}{4\rho^2}.
\end{aligned} \quad (3.52)$$

Приравнявая (3.52) и (3.41) находим β :

$$\frac{-4\rho^2 + 8\rho GM - aQ^2 - 8G^2M^2}{4\rho^2} = -1 + \frac{2GM}{\rho} - \frac{2G^2M^2}{\rho^2}\beta, \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned}
\beta &= 1 + \frac{aQ^2}{4\rho^2}\frac{\rho^2}{2G^2M^2} = 1 + \frac{aQ^2}{8G^2M^2} = 1 + \frac{a}{8G^2M^2}\frac{2(Q_1^2 + Q_2^2)}{a} \\
&= 1 + \frac{Q_1^2 + Q_2^2}{4G^2M^2}.
\end{aligned} \quad (3.54)$$

Итак, получили формулу для β :

$$\beta = 1 + \frac{1}{4(GM)^2} (Q_1^2 + Q_2^2). \quad (3.55)$$

ППП γ можно найти из формулы (3.40):

$$g_{ij} = \delta_{ij}(1 + 2\gamma V) + O(V^2). \quad (3.56)$$

Из формулы (3.38) возьмем g_{ij} и сделаем замену $R = \rho \left(1 + \frac{\mu}{2\rho}\right)^2$, тогда имеем:

$$\begin{aligned} g_{ij} &= H^a \left(1 + \frac{\mu}{2\rho}\right)^4 \delta_{ij} = \left(1 + \frac{P}{R}\right)^a \left(1 + \frac{\mu}{2\rho}\right)^4 \delta_{ij} \approx \\ &\approx \left(1 + \frac{aP}{R}\right) \left(1 + \frac{\mu}{2\rho}\right)^4 \delta_{ij} = \\ &= \left(1 + \frac{aP}{\rho \left(1 + \frac{\mu}{2\rho}\right)^2}\right) \left(1 + \frac{\mu}{2\rho}\right)^4 \delta_{ij} = \\ &= \delta_{ij} \left[\left(1 + \frac{\mu}{2\rho}\right)^4 + \frac{aP}{\rho} \left(1 + \frac{\mu}{2\rho}\right)^2 \right] = \\ &= \delta_{ij} \left[\left(1 + \frac{\mu}{\rho} + \frac{\mu^2}{4\rho^2}\right)^2 + \frac{aP}{\rho} \left(1 + \frac{\mu}{\rho} + \frac{\mu^2}{4\rho^2}\right) \right] \approx \\ &\approx \delta_{ij} \left[\left(1 + \frac{\mu}{\rho}\right)^2 + \frac{aP}{\rho} \left(1 + \frac{\mu}{\rho}\right) \right] = \\ &= \delta_{ij} \left(1 + \frac{2\mu}{\rho} + \frac{\mu^2}{\rho^2} + \frac{aP}{\rho} + \frac{aP\mu}{\rho^2}\right) \approx \delta_{ij} \left(1 + \frac{2\mu}{\rho} + \frac{aP}{\rho}\right). \end{aligned} \quad (3.57)$$

Преобразуем (3.56), подставив в нее значения V и GM :

$$\begin{aligned} \delta_{ij}(1 + 2\gamma V) &= \left|V = \frac{GM}{\rho}\right| = \delta_{ij} \left(1 + 2\gamma \frac{GM}{\rho}\right) = \left|GM = \mu + \frac{aP}{2}\right| = \\ &= \delta_{ij} \left(1 + 2\gamma \frac{\mu + \frac{aP}{2}}{\rho}\right) = \delta_{ij} \left(1 + 2\gamma \frac{\mu}{\rho} + 2\gamma \frac{aP}{2\rho}\right) = \\ &= \delta_{ij} \left(1 + \gamma \left(\frac{2\mu}{\rho} + \frac{aP}{\rho}\right)\right). \end{aligned} \quad (3.58)$$

Приравнивая (3.58) и (3.57) найдем γ :

$$1 + \frac{2\mu}{\rho} + \frac{aP}{\rho} = 1 + \gamma \left(\frac{2\mu}{\rho} + \frac{aP}{\rho} \right), \quad (3.59)$$

$$\gamma = 1. \quad (3.60)$$

Получили формулу для γ .

Эти параметры не зависят явно от векторов $\vec{\lambda}_s$.

3.2.3 Термодинамические параметры: температура Хокинга и энтропия

Запишем общую формулу для вычисления температуры Хокинга T_H :

$$T_H = \frac{1}{4\pi\sqrt{-g_{tt}g_{rr}}} \frac{d(-g_{tt})}{dr}. \quad (3.61)$$

Вычислим все величины, которые есть в формуле (3.61):

$$g_{tt} = -H^{-a} \left(1 - \frac{2\mu}{R} \right) = \left| H = 1 + \frac{P}{R} \right| = - \left(1 + \frac{P}{R} \right)^{-a} \left(1 - \frac{2\mu}{R} \right), \quad (3.62)$$

$$g_{rr} = H^a \left(1 - \frac{2\mu}{R} \right)^{-1} = \left(1 + \frac{P}{R} \right)^a \left(1 - \frac{2\mu}{R} \right)^{-1}, \quad (3.63)$$

$$g_{tt}g_{rr} = - \left(1 + \frac{P}{R} \right)^{-a} \left(1 - \frac{2\mu}{R} \right) \left(1 + \frac{P}{R} \right)^a \left(1 - \frac{2\mu}{R} \right)^{-1} = -1, \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} \frac{d(-g_{tt})}{dr} &= - \frac{d}{dr} \left[- \left(1 + \frac{P}{R} \right)^{-a} \left(1 - \frac{2\mu}{R} \right) \right] = \\ &= \left(1 - \frac{2\mu}{R} \right) \Big|_{R=2\mu} \frac{d}{dr} \left(1 + \frac{P}{R} \right)^{-a} \Big|_{R=2\mu} \\ &\quad + \left(1 + \frac{P}{R} \right)^{-a} \Big|_{R=2\mu} \frac{d}{dr} \left(1 - \frac{2\mu}{R} \right) \Big|_{R=2\mu} \\ &= \left(1 + \frac{P}{2\mu} \right)^{-a} \frac{2\mu}{R^2} \Big|_{R=2\mu} = \frac{1}{2\mu} \left(1 + \frac{P}{2\mu} \right)^{-a}. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Подставим найденные величины в (3.61):

$$T_H = \frac{1}{4\pi\sqrt{-g_{tt}g_{rr}}} \frac{d(-g_{tt})}{dr} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{2\mu} \left(1 + \frac{P}{2\mu} \right)^{-a} = \frac{1}{8\pi\mu} \left(1 + \frac{P}{2\mu} \right)^{-a}. \quad (3.66)$$

Температура Хокинга, соответствующая решению (2.103) с $P > 0$, имеет следующий вид:

$$T_H = \frac{1}{8\pi\mu} \left(1 + \frac{P}{2\mu}\right)^{-a}. \quad (3.67)$$

В этом случае температура Хокинга T_H не зависит явно от векторов $\vec{\lambda}_S$, т.е. когда μ и P (или Q^2) фиксированы.

Запишем общую формулу для энтропии Бекенштейна-Хокинга S_{BH} и вычислим ее:

$$\begin{aligned} S_{BH} = \frac{A}{4G} &= \left| A = 4\pi \left(H^{\frac{a}{2}} R \right)^2 \right|_{R=2\mu} = 4\pi H^a R^2 \Big|_{R=2\mu} = \\ &= 4\pi \left(1 + \frac{P}{R} \right)^a R^2 \Big|_{R=2\mu} = 16\pi\mu^2 \left(1 + \frac{P}{2\mu} \right)^a \Big| = \\ &= \frac{16\pi\mu^2}{4G} \left(1 + \frac{P}{2\mu} \right)^a = \frac{4\pi\mu^2}{G} \left(1 + \frac{P}{2\mu} \right)^a. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Энтропия Бекенштейна-Хокинга $S = A/4G$, соответствующая горизонту при $R = 2\mu$, где A - площадь горизонта, имеет вид:

$$S_{BH} = \frac{4\pi\mu^2}{G} \left(1 + \frac{P}{2\mu} \right)^a. \quad (3.69)$$

Из (3.67) и (3.69) следует, что произведение

$$T_H S_{BH} = \frac{\mu}{2G}, \quad (3.70)$$

не зависит явно от $\vec{\lambda}_S$ и зарядов Q_S , когда μ фиксировано. В этом выражении не используется явный вид модульных функций $H_S(R)$. Здесь и ниже мы положили для простоты $\hbar = c = k_B = 1$.

3.2.4 Термодинамика черной дыры

В этом подразделе мы рассмотрим термодинамику черной дыры. Используя вычисленные значения температуры Хокинга и энтропии, проверим первый закон термодинамики черной дыры и соотношение Смарра.

Можно проверить, что из соотношений (3.24), (3.67) и (3.69) следует первый закон термодинамики черной дыры:

$$dM = TdS + \Phi dQ, \quad (3.71)$$

а также формула Смарра:

$$M = 2TS + \Phi Q, \quad (3.72)$$

где S - энтропия Бекенштейна-Хокинга, T - температура Хокинга, которые соответственно равны:

$$S = S_{BH} = \frac{4\pi\mu^2}{G} \left(1 + \frac{P}{2\mu}\right)^a, \quad (3.73)$$

$$T = T_H = \frac{1}{8\pi\mu} \left(1 + \frac{P}{2\mu}\right)^{-a}, \quad (3.74)$$

$$\Phi = \frac{aQ}{4G(P + 2\mu)}. \quad (3.75)$$

Соотношения (3.71), (3.72) можно представить в следующем виде:

$$dM = TdS + \Phi_1 dQ_1 + \Phi_2 dQ_2, \quad (3.76)$$

$$M = 2TS + \Phi_1 Q_1 + \Phi_2 Q_2, \quad (3.77)$$

где:

$$\Phi_i = \frac{Q_i}{2G(P + 2\mu)}, \quad (3.78)$$

$i = 1, 2$. При выводе соотношений (3.76), (3.77) используется следующее тождество:

$$Q_1^1 + Q_2^2 = \frac{a}{2} Q^2. \quad (3.79)$$

Поясним физический смысл потенциалов (3.78). Первое соотношение в (2.105) при $F^{(1)} = dA^{(1)}$ имеет частное решение для 1-формы:

$$A^{(1)} = A_0^{(1)}(R)dt = \frac{Q_1}{R + P} dt. \quad (3.80)$$

Таким образом, мы получаем:

$$\Phi_1 = \frac{1}{2G} A_0^{(1)}(2\mu), \quad (3.81)$$

т.е. Φ_1 совпадает с точностью до множителя $1/(2G)$ со значением нулевой компоненты первого абелевого калибровочного поля $A^{(1)}$, или электрический потенциал (в выбранной калибровке, т. е. для выбранного частного решения) для поля электрического заряда на горизонте.

Теперь рассмотрим магнитный член в (2.105). Вычисление действия (дуального) оператора Ходжа дает нам:

$$*F^{(2)} = \frac{Q_2}{H^2 R^2} dt \wedge dR, \quad (3.82)$$

(здесь $*F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sqrt{|g|}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$, $\varepsilon_{0123} = 1$). Из (2.85) следует:

$$\vec{\nu}\vec{\lambda}_2 = \frac{a}{2} - 1 \quad (3.83)$$

и следовательно (см. (2.104)):

$$e^{2\vec{\lambda}_2\vec{\varphi}} = H^{a-2}. \quad (3.84)$$

Для дуальной 2-формы:

$$\tilde{F}^{(2)} = d\tilde{A}^{(2)} = e^{2\vec{\lambda}_2\vec{\varphi}} *F^{(2)}, \quad (3.85)$$

мы получим:

$$\tilde{F}^{(2)} = \frac{Q_2}{H^2 R^2} dt \wedge dR, \quad (3.86)$$

и мы можем выбрать соответствующую 1-форму следующим образом:

$$\tilde{A}^{(2)} = \tilde{A}_0^{(2)}(R)dt = \frac{Q_2}{R+P} dt. \quad (3.87)$$

Следовательно:

$$\Phi_2 = \frac{1}{2G} \tilde{A}_0^{(2)}(2\mu), \quad (3.88)$$

т.е. Φ_2 совпадает с точностью до множителя $1/(2G)$ со значением нулевой компоненты дуального абелевого калибровочного поля $\tilde{A}^{(2)}$ или дуального электрического потенциала (в выбранной калибровке) на горизонте, что соответствует полю магнитного заряда, модулированного скалярными полями.

Проверка 1-го закона термодинамики. Запишем 1-ый закон термодинамики (3.76):

$$dM = TdS + \Phi_1 dQ_1 + \Phi_2 dQ_2. \quad (3.89)$$

Вычислим левую часть (3.89):

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dQ} &= \left| M = \frac{\mu}{G} + \frac{aP}{2G} \right| = \frac{d}{dQ} \left(\frac{\mu}{G} + \frac{aP}{2G} \right) = \frac{d}{dQ} \left(\frac{aP}{2G} \right) = \\ &= \left| P = -\mu + \sqrt{\mu^2 + \frac{Q^2}{2}} \right| = \frac{\mu}{2G} \frac{d}{dQ} \left(-\mu + \sqrt{\mu^2 + \frac{Q^2}{2}} \right) = \\ &= \frac{aQ}{4G(P + \mu)}, \end{aligned} \quad (3.90)$$

$$dM = \frac{aQdQ}{4G(P + \mu)}. \quad (3.91)$$

Вычислим правую часть (3.89):

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dQ} &= \frac{d}{dQ} \left[\frac{4\pi\mu^2}{G} \left(1 + \frac{P}{2\mu} \right)^a \right] = \frac{2\pi\mu a}{G} \left(1 + \frac{P}{2\mu} \right)^{a-1} \frac{dP}{dQ} = \\ &= \left| P = -\mu + \sqrt{\mu^2 + \frac{Q^2}{2}} \right| = \frac{\pi\mu a Q}{G \sqrt{\mu^2 + \frac{Q^2}{2}}} \left(1 + \frac{P}{2\mu} \right)^{a-1} = \\ &= \frac{\pi\mu a Q}{G(P + \mu)} \left(1 + \frac{P}{2\mu} \right)^{a-1}, \end{aligned} \quad (3.92)$$

$$\begin{aligned} TdS &= \left| T = \frac{1}{8\pi\mu} \left(1 + \frac{P}{2\mu} \right)^{-a} \right| \\ &= \frac{1}{8\pi\mu} \left(1 + \frac{P}{2\mu} \right)^{-a} \frac{\pi\mu a Q dQ}{G(P + \mu)} \left(1 + \frac{P}{2\mu} \right)^{a-1} \\ &= \frac{aQdQ}{8G(P + \mu) \left(1 + \frac{P}{2\mu} \right)} = \left| 1 + \frac{P}{2\mu} = \frac{Q^2}{4P\mu} \right| = \frac{\mu a P dQ}{2QG(P + \mu)}, \end{aligned} \quad (3.93)$$

$$\begin{aligned}
\Phi_1 dQ_1 + \Phi_2 dQ_2 &= \left| \begin{array}{l} Q_1^2 + Q_2^2 = \frac{a}{2} Q^2 \\ \frac{d}{dQ} (Q_1^2) = 2Q_1 \frac{dQ_1}{dQ} = \frac{a}{2} 2Q - 2Q_2 \frac{dQ_2}{dQ} \\ 2Q_1 dQ_1 = aQ dQ - 2Q_2 dQ_2 \\ dQ_1 = \frac{aQ dQ - 2Q_2 dQ_2}{2Q_1} \end{array} \right| = \\
&= \frac{Q_1}{2G(P+2\mu)} * \frac{aQ dQ - 2Q_2 dQ_2}{2Q_1} + \frac{Q_2 dQ_2}{2G(P+2\mu)} = \\
&= \frac{aQ dQ - 2Q_2 dQ_2 + 2Q_2 dQ_2}{4G(P+2\mu)} = \frac{aQ dQ}{4G(P+2\mu)}
\end{aligned} \tag{3.94}$$

$$\begin{aligned}
TdS + \Phi_1 dQ_1 + \Phi_2 dQ_2 &= \frac{\mu a P dQ}{2QG(P+\mu)} + \frac{aQ dQ}{4G(P+2\mu)} = \\
&= \frac{adQ}{2G} \left(\frac{\mu P}{Q(P+\mu)} + \frac{Q}{2(P+2\mu)} \right) = \\
&= \frac{adQ}{2G} * \frac{2(P+2\mu)\mu P + Q^2(P+\mu)}{2Q(P+2\mu)(P+\mu)} = \\
&= \frac{adQ}{2G} * \frac{Q^2\mu + Q^2(P+\mu)}{2Q(P+2\mu)(P+\mu)} = \\
&= \frac{adQ}{2G} * \frac{Q^2(\mu + P + \mu)}{2Q(P+2\mu)(P+\mu)} = \frac{aQ dQ}{4G(P+2\mu)}.
\end{aligned} \tag{3.95}$$

Видно, что (3.95) и (3.91) равны, следовательно мы доказали, что 1-ый закон термодинамики выполняется.

Проверка формулы Смарра. Запишем формулу Смарра (3.72):

$$M = 2TS + \Phi Q. \tag{3.96}$$

Вычислим левую часть (3.96):

$$M = \frac{1}{G} \left(\mu + \frac{aP}{2} \right) = \frac{1}{G} \frac{(2\mu + aP)}{2} = \frac{1}{2G} (2\mu + aP) = \frac{\mu}{G} + \frac{a}{2G} P. \tag{3.97}$$

Вычислим правую часть (3.96):

$$\begin{aligned}
TS &= \left| \begin{array}{l} T = T_H = \frac{1}{8\pi\mu} \left(1 + \frac{P}{R} \right)^{-a} \\ S = S_{BH} = \frac{4\pi\mu^2}{G} \left(1 + \frac{P}{2\mu} \right)^a \end{array} \right| = \frac{1}{8\pi\mu} \left(1 + \frac{P}{R} \right)^{-a} \frac{4\pi\mu^2}{G} \left(1 + \frac{P}{2\mu} \right)^a \\
&= \frac{\mu}{2G},
\end{aligned} \tag{3.98}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_1 Q_1 + \Phi_2 Q_2 &= \left| \begin{array}{l} \Phi_1 = \frac{Q_1}{2G(P + 2\mu)} \\ \Phi_2 = \frac{Q_2}{2G(P + 2\mu)} \end{array} \right| = \\
&= \frac{Q_1}{2G(P + 2\mu)} Q_1 + \frac{Q_2}{2G(P + 2\mu)} Q_2 = \\
&= \frac{Q_1^2}{2G(P + 2\mu)} + \frac{Q_2^2}{2G(P + 2\mu)} = \frac{Q_1^2 + Q_2^2}{2G(P + 2\mu)} = \\
&= \frac{aQ^2}{4G(P + 2\mu)} = \left| \begin{array}{l} P(P + 2\mu) = \frac{Q^2}{2} \\ \frac{Q^2}{2(P + 2\mu)} = P \end{array} \right| = \frac{a}{2G} P.
\end{aligned} \tag{3.99}$$

Подставим (3.99), (3.98) в правую часть (3.96):

$$2TS + \Phi_1 Q_1 + \Phi_2 Q_2 = \frac{\mu}{G} + \frac{a}{2G} P. \tag{3.100}$$

Отсюда видно, что (3.100) и (3.97) равны, следовательно формула Смарра в нашем случае справедлива.

4 КВАЗИНОРМАЛЬНЫЕ МОДЫ ДИЛАТОН-ДИОННОЙ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ

С математической точки зрения задача квазинормальных мод (КНМ) может быть сведена к изучению решений волнового уравнения для скалярной функции $\Phi(t, x)$ [65], выбранной в следующем виде:

$$\Phi(t, x) = e^{-i\omega t} \Phi_*(x), \quad (4.1)$$

где $\Phi_* = \Phi_*(x)$ подчиняется уравнению типа Шредингера:

$$\left(-\varepsilon^2 \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right) \Phi_* = \omega^2 \Phi_*. \quad (4.2)$$

Эта функция определена в некоторой области вещественной прямой $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, где $\varepsilon > 0$ - некоторый параметр, например $\varepsilon = 1$; для обзора см. в [66-69]. Для асимптотически плоских чернотырных решений функции $\Phi_*(x)$ определены на \mathbb{R} . Здесь x так называемая “черепашня” координата (в тексте статьи обозначается как R_*). Потенциал $V(x)$ является положительно определенной гладкой функцией, по крайней мере, для некоторых известных сферически-симметричных решений (например, решений Шварцшильда и Рейснера – Нордстрема), достаточно быстро спадающей (до нуля) при приближении либо к горизонту ($x \rightarrow -\infty$), либо к пространственной бесконечности ($x \rightarrow +\infty$). Обычно частоты КНМ ω определяются как комплексные числа, где $Re\omega > 0$ и $Im\omega < 0$, и такие, что волновые функции (4.1) экспоненциально затухают во времени при ($t \rightarrow \infty$), что соответствует асимптотически устойчивым возмущениям. Частоты КНМ появляются в таких решениях уравнения (4.2), которые ведут себя как уходящие волны на пространственной бесконечности: $\Phi_*(x) \sim e^{\frac{i\omega x}{\varepsilon}}$ при $x \rightarrow \infty$ ($Re\omega > 0$) и входящие на горизонте: $\Phi_*(x) \sim e^{-\frac{i\omega x}{\varepsilon}}$ при $x \rightarrow -\infty$ с экспоненциальным ростом (от $|x|$) абсолютной величины $|\Phi_*(x)|$ при $|x| \rightarrow \infty$ (в силу $Im\omega < 0$).

Для вычисления КНМ [68,69] существует (наиболее популярный) метод, введенный в [42,43,70], который можно назвать методом аналитического продолжения. Наиболее «прозрачный» вариант этого метода был недавно предложен (и проверен) в работе [45]. Здесь для простоты рассматривается случай потенциала, определенного на всей действительной оси $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, чтобы избежать краевых проблем. (Для более сложного и «тонкого» случая, когда оператор Шредингера и эффективный потенциал определены на $(0, +\infty)$ - должны быть указаны надлежащие граничные условия, см. [71].) Предписание предлагаемого метода состоит в следующем: вначале следует начинать с уравнения Шредингера для нерелятивистской квантовой частицы (массы $1/2$), движущейся в инвертированном потенциале $-V(x)$:

$$\left(-\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} - V(x)\right)\psi = E\psi, \quad (4.3)$$

где $\psi = \psi(x)$ - волновая функция. Рассматриваемый инвертированный потенциал $-V(x)$ может иметь определенные связанные состояния, описываемые дискретным спектром для уровней энергии $E_n = E(\hbar, n | -V)$, где $n = 0, 1, \dots$. Соответствующие волновые функции $\psi = \psi_n(x)$ для рассматриваемого потенциала экспоненциально затухают на обеих бесконечностях, то есть $\psi_n \sim e^{\mp \sqrt{-E_n} \frac{x}{\hbar}}$ при $x \rightarrow \pm\infty$. Подход (аналитического продолжения) Хацуды [45] состоит в том, что частоты КНМ для потенциала $V(x)$ могут быть получены из связанных состояний для инвертированного потенциала $-V(x)$, если формально положить $\hbar = i\varepsilon$. Следуя этому предписанию, получаем следующие частоты КНМ:

$$\omega^2 = -E(\hbar = i\varepsilon, n | -V), \quad (4.4)$$

где $n = 0, 1, \dots$ называется номером обертона КНМ.

Следует отметить, что метод, предложенный в [45] для вычисления квазинормальных частот сферически-симметричных черных дыр связывает их с энергиями связанных состояний ангармонических осцилляторов с помощью аналитического продолжения по \hbar . Как отмечается в работе [45], известные результаты метода Вентцеля-Крамерса-Бриллюэна (ВКБ) легко воспроизводятся данным методом и, более того, «пертурбативные ВКБ-ряды квазинормальных частот оказываются суммируемыми по Борелю расходящимися рядами как для черных дыр Шварцшильда, так и для черных дыр Рейснера – Нордстрема».

В данной главе изучается спектр КНМ в эйкональном приближении для специального диопоподобного дилатонного чернойдырного решения из Главы 2 [58], с электрическим и магнитным цветными зарядами Q_1 и Q_2 , соответственно, в 4-мерной модели с метрикой g , двумя скалярными полями φ^1, φ^2 , двумя 2-формами $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$, соответствующими двум векторам дилатонной связи $\vec{\lambda}_1$ и $\vec{\lambda}_2$ ($\vec{\lambda}_1 \neq -\vec{\lambda}_2$) соответственно.

Эти эйкональные КНМ моды зависят от безразмерного параметра a ($0 < a \leq 2$), который является функцией от $\vec{\lambda}_i$. Следует отметить, что КНМ для дилатонных черных дыр рассматривались в большом количестве работ, см. [72-80] и ссылки в них.

Связь между 2-формами и цветными зарядами задается формулой:

$$F^{(1)} = Q_1 \tau_1, F^{(2)} = Q_2 \tau_2, \quad (4.5)$$

где $\tau_2 = \text{vol}[S^2]$ —«магнитная» 2-форма, которая представляет собой объемную форму на 2-мерной сфере, а τ_1 - «электрическая» 2-форма.

Отметим, что в случае одного скалярного поля φ и двух констант связи λ_1 , λ_2 дионоподобный анзац недавно был рассмотрен в работах [32,35,37,52]. При $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ решения из работы [32] описывали тривиальное некомпозитное обобщение дилатонных дионных чернотырных решений в модели с одной 2-формой и одним скалярным полем, которая рассматривалась в [31], см. также работы [13,25,30,60] и ссылки там.

Решения с одним скалярным полем из работ [32,35] могут быть «встроены» в исследуемые решения при рассмотрении случая коллинеарных векторов дилатонной связи (то есть, когда вектора дилатонной связи являются коллинеарными):

$$\vec{\lambda}_1 = \lambda_1 \vec{e}, \quad \vec{\lambda}_2 = \lambda_2 \vec{e}, \quad (4.6)$$

где $\vec{e}^2 = 1$, $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$.

Глава организована следующим образом: в разделе 4.1 мы аналитически выводим эйкональное приближение для частот КНМ, соответствующих безмассовому пробному скалярному полю на фоне метрики рассматриваемого дионоподобного решения для черной дыры и изучаем их особенности. В подразделе 4.1.1 мы рассматриваем два предельных случая $a = +0$ и $a = 2$, которые отвечают решениям Шварцшильда и Рейснера–Нордстрема, соответственно, для черных дыр. В разделе 4.2 мы проверяем справедливость гипотезы Хода [48] для рассматриваемого решения, когда $0 < a \leq 2$.

4.1 Квазинормальные моды

В этом разделе мы получаем квазинормальные моды (в эйкональном приближении) для нашего статического и сферически-симметричного решения с метрикой, первоначально заданной в следующем общем виде:

$$ds^2 = -A(u)dt^2 + B(u)du^2 + C(u)d\Omega^2, \quad (4.7)$$

где $A(u), B(u), C(u) > 0$ и $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$. Следует отметить, что в этом разделе мы используем планковские единицы, т.е. полагаем $\hbar = G = c = 1$.

Рассмотрим пробное безмассовое скалярное поле, заданное на фоне, описываемом метрикой (4.7). Уравнение движения в общем виде записывается в виде ковариантного уравнения Клейна – Фока – Гордона:

$$\Delta\Psi = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu (\sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Psi) = 0, \quad (4.8)$$

где $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$. Чтобы решить это уравнение, разделим переменные в функции Ψ следующим образом:

$$\Psi = e^{-i\omega t} e^{-\gamma} \Psi_*(u) Y_{lm}, \quad (4.9)$$

где Y_{lm} - сферические гармоники. Уравнение (4.8) с учетом (4.9) дает уравнение, описывающее радиальную функцию $\Psi_*(u)$ и имеющее вид уравнения Шредингера:

$$\frac{d^2\Psi_*(u)}{du^2} + \left\{ \frac{B}{A}\omega^2 - \frac{B}{C}l(l+1) - \gamma'' - (\gamma')^2 \right\} \Psi_*(u) = 0, \quad (4.10)$$

где

$$\gamma = \frac{1}{2} \ln(B^{-1}C\sqrt{AB}), \quad (4.11)$$

и $\gamma' = d\gamma/du$, l - мультипольное квантовое число, $l = 0, 1, \dots$

Принимая во внимание приведенные выше выражения, можно рассмотреть дионоподобное решение для черной дыры, которое имеет следующий вид:

$$ds^2 = -f(R)dt^2 + \frac{dR^2}{f(R)} + H^a R^2 d\Omega^2, \quad (4.12)$$

где $f(R)$ и $C(R)$ согласно формуле (1.33) можно записать как:

$$f(R) = A = H^{-a} \left(1 - \frac{2\mu}{R} \right), \quad (4.13)$$

$$C = H^a R^2, \quad (4.14)$$

и $H(R) = 1 + P/R$ - «модульная» функция, $\mu, P > 0$ и $0 < a \leq 2$, как показано ранее. После использования преобразования координаты в «черепашью»:

$$dR_* = \frac{dR}{f}, \quad (4.15)$$

метрика принимает следующий вид:

$$ds^2 = -f dt^2 + f dR_*^2 + C d\Omega^2. \quad (4.16)$$

Для выбора «черепашьей» координаты в качестве радиальной ($u = R_*$) имеем $A = B = f$ и:

$$\gamma = \frac{1}{2} \ln C = \frac{1}{2} \ln(H^a R^2). \quad (4.17)$$

Тогда уравнение Клейна – Фока – Гордона принимает вид:

$$\frac{d^2\Psi_*}{dR_*^2} + \{\omega^2 - V\} \Psi_* = 0, \quad (4.18)$$

где ω - (циклическая) частота квазинормальной моды, а $V = V(R) = V(R(R_*))$ - эффективный потенциал:

$$V = \mathcal{V} + \delta\mathcal{V}, \quad (4.19)$$

$$\mathcal{V} = \frac{l(l+1)f}{H^a R^2}, \quad (4.20)$$

$$\delta\mathcal{V} = \gamma'' + (\gamma')^2 = \frac{f^2 a(a-2)P^2}{4H^2 R^4} + \frac{f(2R - (a-2)P)(aP(R-2\mu) + 2\mu(P+R))}{2H^{a+2} R^5}, \quad (4.21)$$

так что \mathcal{V} - эйкональная часть эффективного потенциала. Здесь и далее обозначено $F' = \frac{dF}{dR_*} = f \frac{dF}{dR}$. Подробный вывод (4.18), (4.20) и (4.21) приведен в Приложении А.

Далее мы рассматриваем так называемое эйкональное приближение, когда $l \gg 1$. Максимум эйкональной части эффективного потенциала находится из условия:

$$\mathcal{V}' = f \frac{d\mathcal{V}}{dR} = -2f[R^2 + ((1-a)R - 3\mu)R + (2a - 3)P\mu](H^{-2a-1}R^{-5}), \quad (4.22)$$

или, что то же самое:

$$R^2 + ((1-a)R - 3\mu)R + (2a - 3)P\mu = 0, \quad (4.23)$$

что дает соответствующий радиус:

$$R_0 = \frac{a-1}{2}P + \frac{3\mu}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\mathcal{D}}, \quad (4.24)$$

$$\mathcal{D} = (1-a)^2 P^2 + 2(3-a)P\mu + 9\mu^2 > 0. \quad (4.25)$$

Неравенство (4.25), справедливое при $0 < a \leq 2$, является тривиальным. Нетрудно проверить, используя квадратное уравнение для $Z = R - 2\mu$

$$Z^2 + ((1-a)P + \mu)Z - 2\mu^2 - P\mu = 0, \quad (4.26)$$

и $\mathcal{D} > 0$, что:

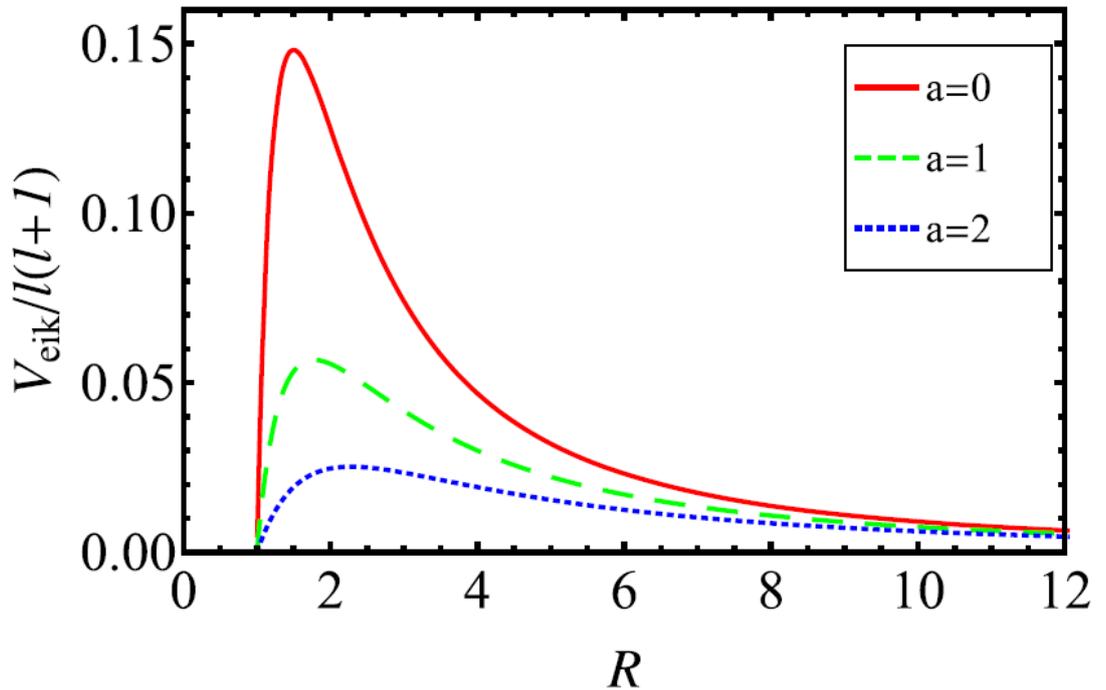
$$R_0 = R_{0,+} > 2\mu > R_{0,-}, \quad (4.27)$$

для всех $0 < a \leq 2$. Здесь $R_{0,-}$, - меньший корень квадратного уравнения (4.23), который соответствует «положению» под горизонтом и нами не рассматривается.

Таким образом, максимум эйконоальной части эффективного потенциала становится равным:

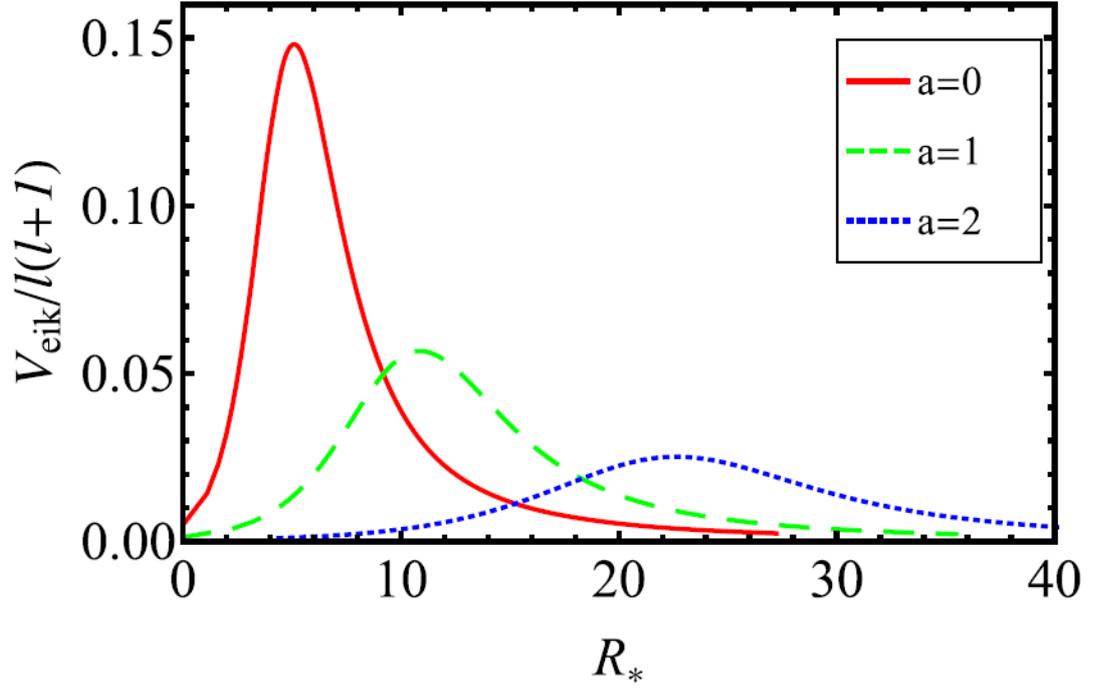
$$\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}(R_0) = \frac{l(l+1)}{R_0^2} \left(1 - \frac{2\mu}{R_0}\right) \left(1 + \frac{P}{R_0}\right)^{-2a}. \quad (4.28)$$

На рисунках 4.1 - 4.2 представлена приведенная эйконоальная часть эффективного потенциала $\mathcal{V}/(l(l+1))$ ($l \neq 0$) как функция радиальной координаты R (рисунок 4.1) и «черепашьей» координаты R_* (рисунок 4.2). Как видно из примеров, представленных на рисунке для специальных фиксированных значений P и μ максимум эффективного потенциала является наибольшим для случая $a = 0$ и наименьшим для случая $a = 2$. Случай, когда $a = 1$, находится посередине. Как и ожидалось, на больших расстояниях эффективный потенциал стремится к нулю.



Сплошная красная линия: $a = 0$; пунктирная зеленая линия: $a = 1$;
пунктирная синяя линия: $a = 2$.

Рисунок 4.1 – Приведенная эйконоальная часть эффективного потенциала $V_{eik} = \mathcal{V}$ в зависимости от R при $P = 1$ и $\mu = 1/2$.



Сплошная красная линия: $a = 0$; пунктирная зеленая линия: $a = 1$;
пунктирная синяя линия: $a = 2$

Рисунок 4.2 – Приведенная эйкональная часть эффективного потенциала $V_{eik} = \mathcal{V}$ в зависимости от R_* при $P = 1$ и $\mu = 1/2$.

Вторая производная по «черепашьей» координате определяется выражением:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_0'' &= \left. \frac{d^2 \mathcal{V}}{dR_*^2} \right|_{R_*=R_*(R_0)} = f^2 \left. \frac{d^2 \mathcal{V}}{dR^2} \right|_{R=R_0} \\ &= -\frac{2l(l+1)}{R_0^5} \left(1 - \frac{2\mu}{R_0}\right)^2 \left(1 - \frac{2\mu}{R_0}\right)^{-(1+4a)} \sqrt{\mathcal{D}}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

где \mathcal{D} определено в (4.25).

Квадрат циклической частоты в эйкональном приближении выглядит следующим образом [68,69]:

$$\omega^2 = \mathcal{V}_0 - i \left(n + \frac{1}{2}\right) \sqrt{-2\mathcal{V}_0''} + O(1), \quad (4.30)$$

где $l \gg 1$ и $l \gg n$. Здесь $n = 0, 1, \dots$ - номер обертона. Выбирая соответствующий знак для ω , мы получаем асимптотические соотношения (при $l \rightarrow +\infty$) для действительной и мнимой частей комплексного ω в эйкональном приближении:

$$Re(\omega) = \left(l + \frac{1}{2}\right) H_0^{-a} F_0^{1/2} R_0^{-1} + O\left(\frac{1}{l + \frac{1}{2}}\right), \quad (4.31)$$

$$Im(\omega) = -\left(l + \frac{1}{2}\right) H_0^{-a-1/2} F_0^{1/2} R_0^{-3/2} \mathcal{D}^{1/4} + O\left(\frac{1}{l + \frac{1}{2}}\right), \quad (4.32)$$

где

$$H_0 = 1 + \frac{P}{R_0}, \quad F_0 = 1 - \frac{2\mu}{R_0}, \quad R_0, \quad \mathcal{D}$$

определены формулами (4.24), (4.25) соответственно. Подробный вывод (4.31) и (4.32) дается в Приложении А.

На рисунке 4.3 изображена приведенная (нормированная) действительная часть частоты КНМ $Re(\omega)/(l + 1/2)$ в эйкональном приближении, как функция параметра P для различных значений a и $\mu = 1/2$. На нижней панели рисунка приводится трехмерный график зависимости $Re(\omega)$ от P и a . Здесь можно заметить, что в предельном случае, когда $a = 0$, мы приходим к значению $Re(\omega)$, точно такому же, как у черной дыры Шварцшильда.

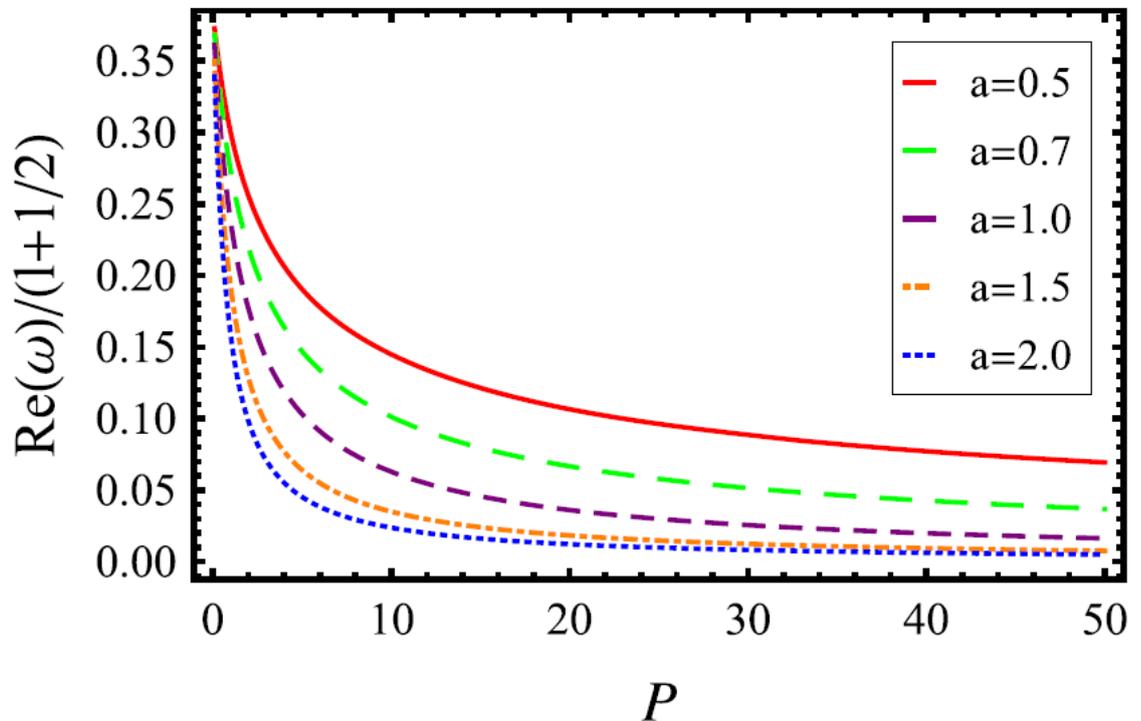


Рисунок 4.3 а) – Зависимость $Re(\omega)/(l + 1/2)$ в эйкональном приближении от P для различных значений a в диапазоне $0 < a \leq 2$ при $\mu = 1/2$. Двухмерный график.

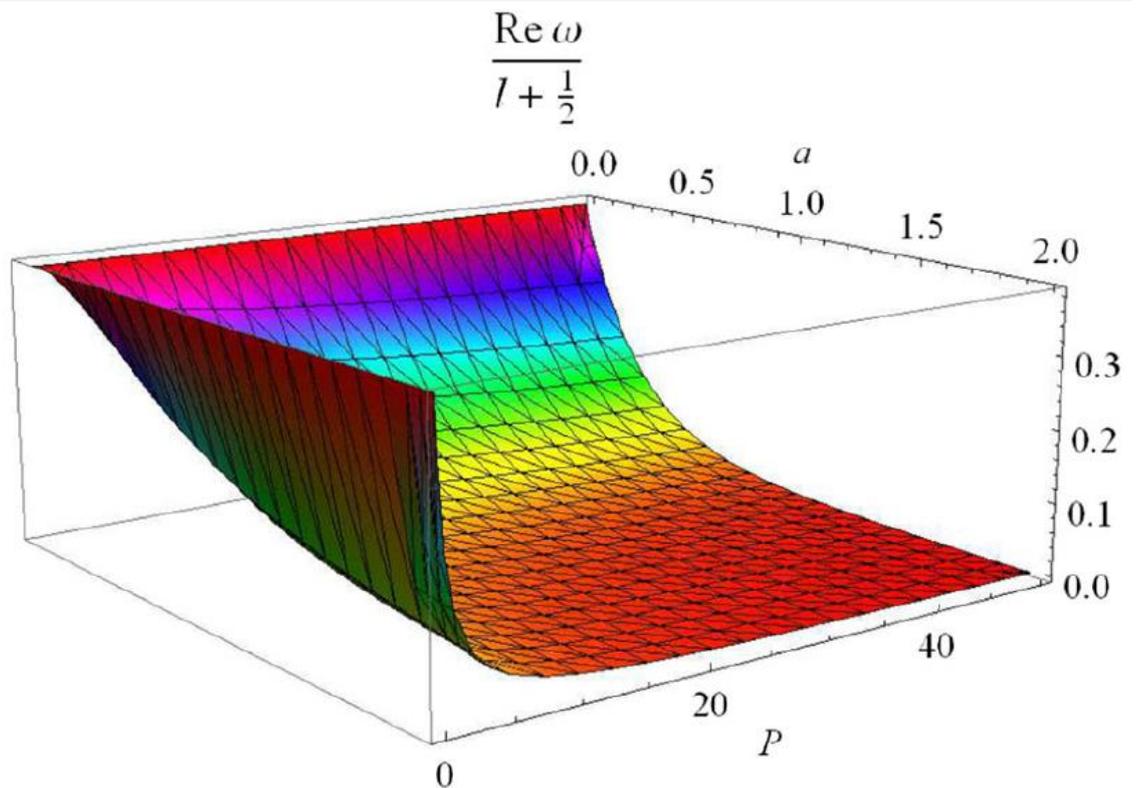


Рисунок 4.3 б) – Зависимость $Re(\omega)/(l + 1/2)$ в эйкональном приближении от P для различных значений a в диапазоне $0 < a \leq 2$ при $\mu = 1/2$. Трехмерный график.

На рисунке 4.4 построен график для приведенной мнимой части частоты КНМ (в эйкональном пределе) с отрицательным знаком $-Im(\omega)/(n + 1/2)$ как функции параметра P для различных значений a и $\mu = 1/2$ по аналогии с рис. 4.2. На первый взгляд, рисунки 4.2 и 4.3 кажутся похожими. Однако согласно формулам. (4.31) и (4.32) это не так.

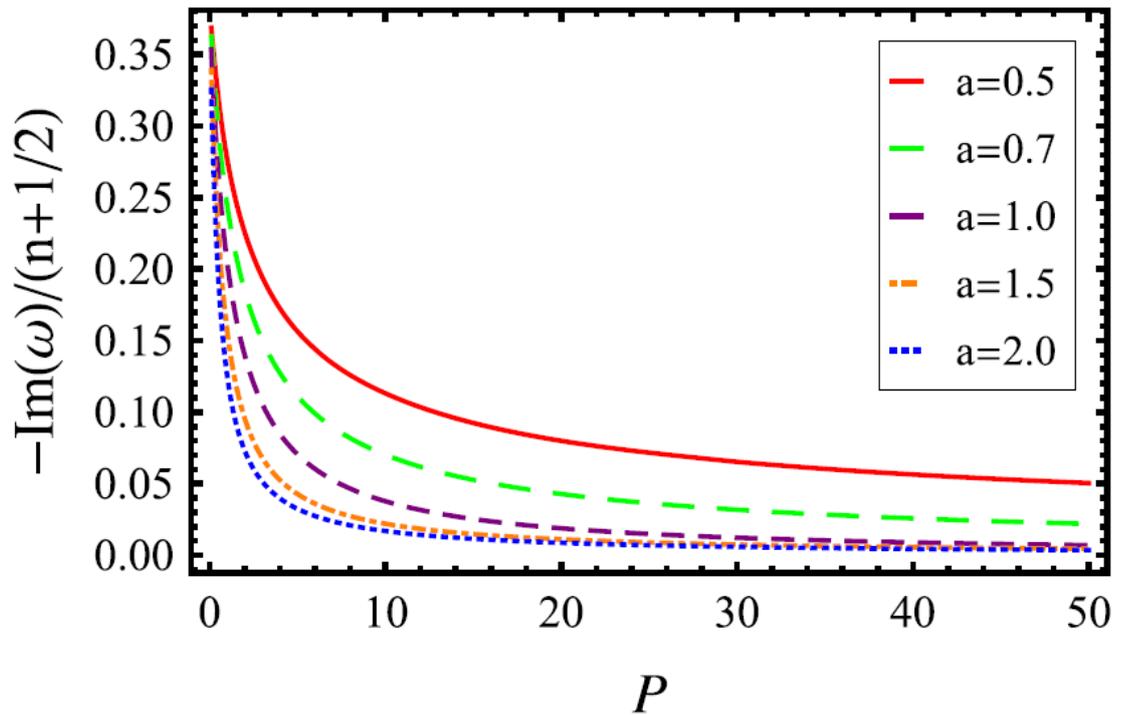


Рисунок 4.4 а) - Зависимость $-\text{Im}(\omega)/(n + 1/2)$ в эйкональном приближении от P для различных значений a в диапазоне $0 < a \leq 2$ при $\mu = 1/2$. Двухмерный график.

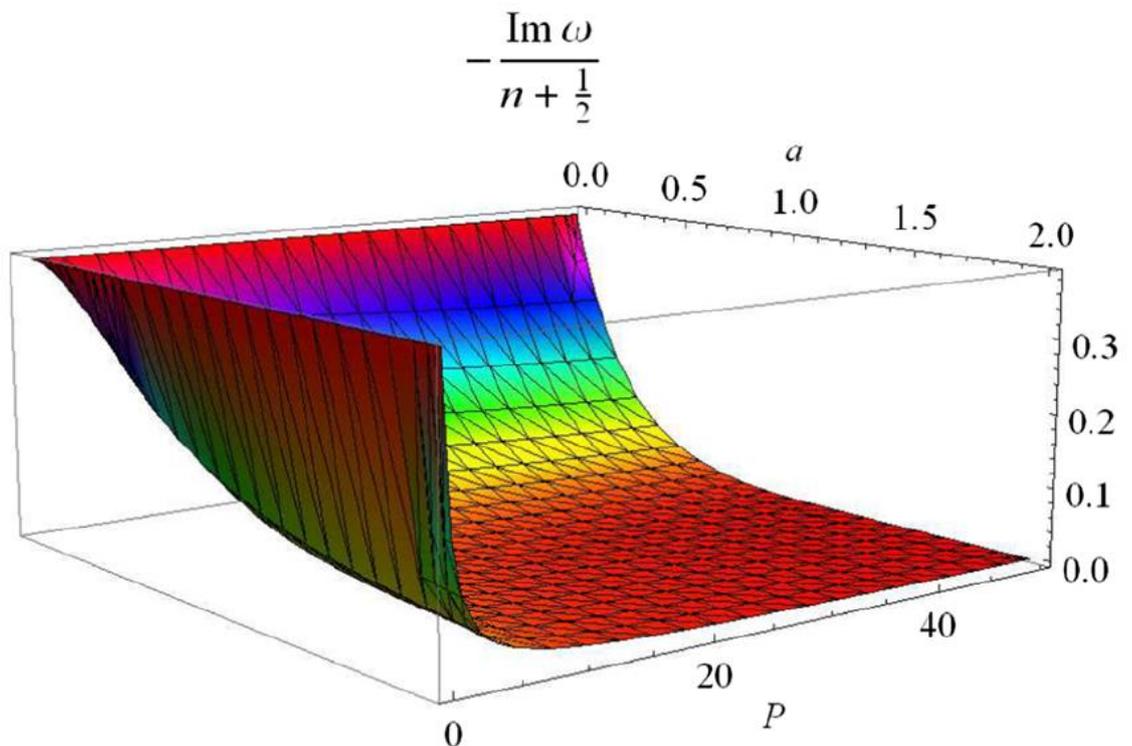


Рисунок 4.4 б) - Зависимость $-\text{Im}(\omega)/(n + 1/2)$ в эйкональном приближении от P для различных значений a в диапазоне $0 < a \leq 2$ при $\mu = 1/2$. Трехмерный график.

Замечание. Как было показано в [81], параметры неустойчивых круговых нулевых геодезических вокруг стационарных сферически-симметричных и асимптотически плоских черных дыр соответствуют эйкональной части квазинормальных мод этих черных дыр. См. также [82,83] и ссылки там. Но, как указывалось в [84] это соответствие действительно, если: (а) возмущения описываются «хорошим» эффективным потенциалом, (б) «оно ограничено возмущениями только пробных полей, а не самого гравитационного поля или других полей, которые неминимально связаны с гравитацией». Здесь мы не рассматриваем это соответствие для нашего решения.

4.2 Предельные случаи, соответствующие черным дырам Шварцшильда и Рейснера-Нордстрёма.

В этом разделе мы рассматриваем два предельных случая $a = +0$ и $a = 2$, которые отвечают метрикам Шварцшильда и Рейснера-Нордстрёма, соответственно.

(а) Рассмотрим сначала случай, когда $a = +0$. Этот предел может быть получен в режиме сильной связи, когда:

$$\vec{\lambda}_1 = \lambda \vec{e}_1, \quad \vec{\lambda}_2 = \lambda \vec{e}_2, \quad (4.33)$$

где $\vec{e}_1^2 = \vec{e}_2^2 = 1$, и:

$$\vec{e}_1 \vec{e}_2 \neq \pm 1, \quad \lambda \rightarrow +\infty. \quad (4.34)$$

В этом случае соотношения (4.31) и (4.32) для КНМ в эйкональном приближении имеют вид:

$$Re(\omega) = \left(l + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{M}{r_0^3}} + O\left(\frac{1}{l + \frac{1}{2}}\right), \quad (4.35)$$

$$Im(\omega) = -\left(n + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{M}{r_0^3}} + O\left(\frac{1}{l + \frac{1}{2}}\right), \quad (4.36)$$

где $r_0 = R_0 = 3M$ соответствует положению, в котором эффективный потенциал черной дыры достигает своего максимума. Следует отметить, что $r_0 = 3M$ - это радиус фотонной сферы для черной дыры Шварцшильда. Эти результаты были получены в [46], и полученные выше результаты соответствуют им.

(б) Теперь рассмотрим случай, когда $a = 2$. Как было сказано выше, это имеет место для коллинеарных векторов $\vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2$. Можно также получить предел

$a = 2$ в режиме слабой связи, когда векторы дилатонной связи подчиняются (4.33) и:

$$\vec{e}_1 \vec{e}_2 \neq -1, \quad \lambda \rightarrow +0. \quad (4.37)$$

В этом случае эйкональные КНМ (см. (4.31) и (4.32)) имеет вид:

$$Re(\omega) = \left(l + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{M}{r_0^3} - \frac{Q^2}{2r_0^4}} + O\left(\frac{1}{l + \frac{1}{2}}\right), \quad (4.38)$$

$$Im(\omega) = -\left(n + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{M}{r_0^3} - \frac{Q^2}{2r_0^4}} \sqrt{\frac{3M}{r_0} - \frac{2Q^2}{r_0^2}} + O\left(\frac{1}{l + \frac{1}{2}}\right), \quad (4.39)$$

где $r_0 = 3M/2 + (1/2)\sqrt{9M^2 - 4Q^2} = R_0 + P$ соответствует положению нестабильной круговой фотонной орбиты в пространстве-времени Рейснера – Нордстрема. Эти результаты были получены в [47] (для $n = 0$), и приведенные выше результаты согласуются с результатами из [47], если иметь в виду следующую связь между нашим обозначением для заряда (Q) и обозначением использованным в работе [47]: $Q^2 = 2Q_{RN}^2$.

4.3 Гипотеза Хода

Здесь мы проверяем гипотезу, сформулированную Ходом [48] о существовании квазинормальных мод, удовлетворяющих неравенству:

$$|Im(\omega)| \leq \pi T_H, \quad (4.40)$$

где T_H - температура Хокинга.

Недавно гипотеза Хода была проверена в теориях с более высокими поправками на кривизну, такими как теории Эйнштейна-Гаусса-Бонне с дилатонным полем и Эйнштейна-Вейля для поля Дирака [85]. Было показано, что в обеих теориях поле Дирака подчиняется гипотезе Хода для всего диапазона параметров черной дыры [85].

Здесь мы проверяем эту гипотезу, используя эйкональные соотношения (4.32) для $Im(\omega)$ и соотношение для температуры Хокинга (3.20). Для наших целей достаточно проверить справедливость неравенства

$$\begin{aligned} y &= \frac{|Im(\omega_{eik})(n=0)|}{\pi T_H} = \\ &= 4 \left(1 + \frac{p}{x}\right)^{-a-1/2} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{1/2} x^{-3/2} d^{1/4} \left(1 + \frac{p}{2}\right)^a < 1, \end{aligned} \quad (4.41)$$

для всех $p = P/\mu > 0$, где

$$x \equiv \frac{R_0}{\mu} = \frac{a-1}{2}p + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{d}, \quad (4.42)$$

$$d \equiv \frac{D}{\mu^2} = (1-a)^2p^2 + 2(3-a)p + 9 > 0. \quad (4.43)$$

В (4.41) мы используем предельное «эйкональное значение», задаваемое первым членом в (4.32) для наименьшего номера обертона $n = 0$.

В таблице 1 представлены результаты численной проверки неравенства Хода с использованием полученных соотношений для эйкональных КНМ в основном состоянии $n = 0$. Оказалось, что неравенство Хода справедливо (в эйкональном режиме) в диапазоне $0 < a \leq 1$. При проверке неравенства Хода мы имеем дело с максимальным $y_{max} = y_{max}(a)$ и предельным $y_{lim} = y_{lim}(a)$ (когда p стремится к бесконечности) значениями функции $y(p, a)$ для разных значений параметра a в рассматриваемом диапазоне.

Таблица 1 - Максимальные и предельные значения y для различных значений параметра a в основном состоянии $n = 0$. y_{max} - максимальное значение y , p_0 - значение p , соответствующее y_{max} , а $y_{lim} = \lim_{p \rightarrow \infty} y$.

a	p_0	y_{max}	y_{lim}
10^{-2}	1.314	0.770	0.769
0.1	1.421	0.772	0.762
0.2	1.563	0.774	0.752
0.4	1.954	0.780	0.726
0.5	2.233	0.785	0.707
0.6	2.608	0.790	0.681
0.8	3.933	0.808	0.588
1.0	8.196	0.847	0

Можно проверить, что

$$y_{lim}(a) = \left(\frac{1-a}{3-2a}\right)^{3/2-a} 2^{2-a} < \frac{4}{3\sqrt{3}} < 1, \quad (4.44)$$

для $0 < a < 1$ и $y_{lim}(1) = 0$. Соотношение для $y_{lim}(a)$ просто следует из равенства

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} x(p, a) = \frac{3 - 2a}{1 - a}, \quad (4.45)$$

для $0 < a < 1$.

Обозначим значение p , соответствующее $y_{max}(a)$, как $p_0 = p_0(a)$. При увеличении a значения $p_0(a)$ и $y_{max}(a)$ увеличиваются, а $y_{lim}(a)$ уменьшаются. Получаем $y_{max}(1) \approx 0.847$ и $y_{lim}(1) = 0$. При уменьшении a оба значения $y_{max}(a)$ и $y_{lim}(a)$ приближаются к конечному значению, соответствующему случаю Шварцшильда $\frac{4}{3\sqrt{3}} \approx 0.7698$, когда $a \rightarrow 0$.

На рис. 4.5 проиллюстрировано поведение $y = y(p, a)$ как функции от p . На верхней панели построен двумерный график для $a = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$, а на нижней панели приведен трехмерный график для диапазона $0 < a \leq 1$, где выполняется гипотеза Хода. Таким образом, мы приходим к следующему утверждению.

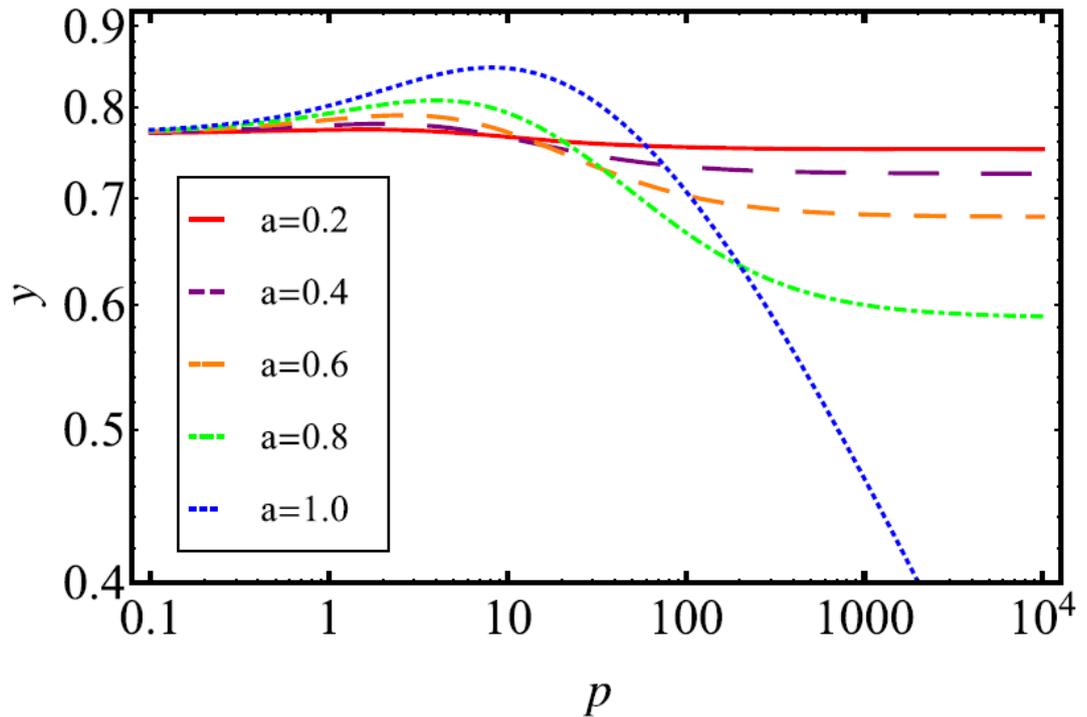


Рисунок 4.5 а) - Зависимость y от p для определенных фиксированных значений a (см. (4.41)) в логарифмическом масштабе при $0 < a \leq 1$. Двухмерный график.

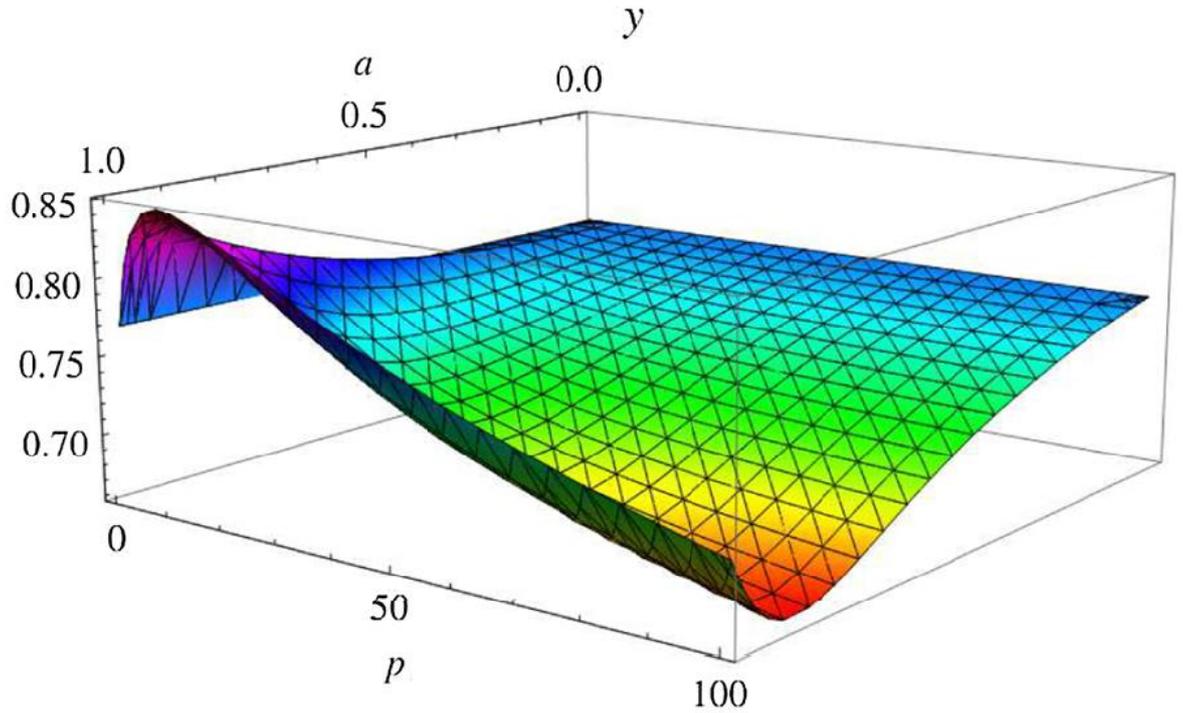


Рисунок 4.5 б) - Зависимость y от p для определенных фиксированных значений a (см. (4.41)) в логарифмическом масштабе при $0 < a \leq 1$.
Трехмерный график.

Предложение. Безразмерный параметр $y = y(p, a)$ из (4.41) подчиняется неравенству: $y(p, a) < 1$ для всех $p > 0$ и $a \in (0, 1]$.

При $0 < a < 1$ это предложение аналитически доказано в Приложении Б. Для $a = 1$ оно подтверждено нашей численной оценкой $y < y_{max}(1) \approx 0.847$.

В дополнении к вышеизложенному, рассмотрим диапазон $1 < a \leq 2$ для проверки гипотезы Хода. В этом случае мы имеем

$$y_{lim}(a) = \lim_{p \rightarrow +\infty} y(p, a) = +\infty, \quad (4.46)$$

в силу асимптотического соотношения $y(p, a) \sim C(a)p^{a-1}$ при $p \rightarrow +\infty$, следующего из $x(p, a) \sim (a-1)p$, где $C(a) = 2^{2-a}(a/(a-1))^{-a-1/2}(a-1)^{-1}$. Строго говоря, для $1 < a \leq 2$ существуют такие критические значения $p_{crit}(a)$ параметра p , что для $p \in (0, p_{crit}(a))$ гипотеза Хода верна в эйконольном режиме, а для $p \in (p_{crit}(a), +\infty)$ она в этом режиме не работает (подробности см. на рис. 5). Здесь предел $p = +\infty$ соответствует случаю для экстремальной черной дыры, который здесь не рассматривается.

Замечание. Недавно в работе [86] был обнаружен пример нарушения гипотезы Хода для некоторых (скалярно-гравитационных) возмущений решения для черной дыры Гаусса-Бонне-де Ситтера при $D = 5$.

В таблице 4.2 представлены некоторые критические значения p_{crit} , которые получаются с помощью условия $y(p_{crit}) = 1$ (со значением y , вычисленным для

основного состояния $n = 0$) и q_{crit} , соответствующего p_{crit} согласно формуле (4.47) для различных значений параметра модели a , при которых $1 < a \leq 2$.

Здесь мы используем следующее соотношение (см. уравнение (3.6))

$$q = \frac{|Q|}{M} = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{p(2+p)}}{2+ap} < \frac{2\sqrt{2}}{a} = q_{ext} \quad (4.47)$$

где q_{ext} соответствует экстремальному случаю. (Здесь $G = 1$.)

Таблица 4.2 - Критические значения p_{crit} такие, что $u(p_{crit}) = 1$ и q_{crit} , соответствующие p_{crit} согласно (4.47) для определенных значений a ($1 < a \leq 2$).

a	p_{crit}	q_{crit}
1.1	8131.908	2.571
1.2	18.157	2.274
1.3	8.031	2.041
1.4	5.402	1.870
1.6	3.356	1.627
1.8	2.461	1.457
2.0	1.951	1.330

На рисунке 4.6 проиллюстрированы значения $u = u(p, a)$ как функции p . На верхней панели построен двумерный график для $a = 1.2, 1.3, 1.4, 1.6, 2.0$, а на нижней панели приведен трехмерный график для диапазона $1 < a \leq 2$. В этом случае неравенство Хода (4.41) выполняется в диапазоне $p \in (0, p_{crit}(a))$, а при $p \in (p_{crit}(a), +\infty)$ - не выполняется.

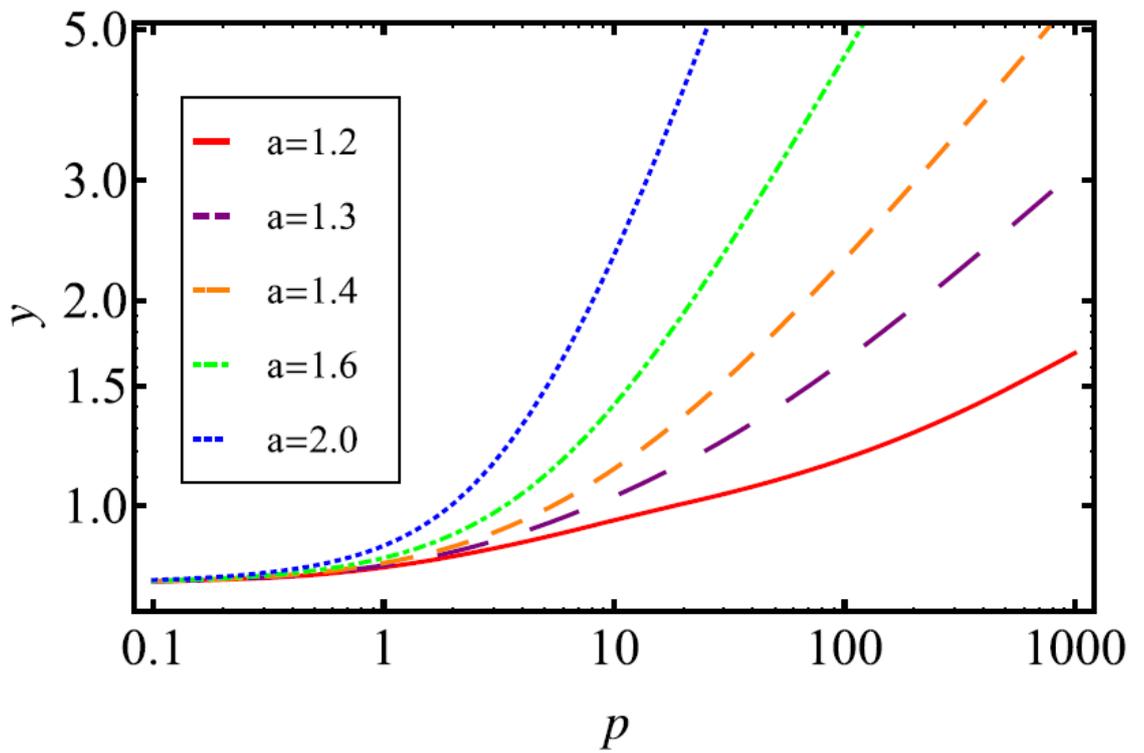


Рисунок 4.6 а) - Зависимость y от p для различных a (см. (4.41)) в логарифмическом масштабе при $1 < a \leq 2$. Двухмерный график.

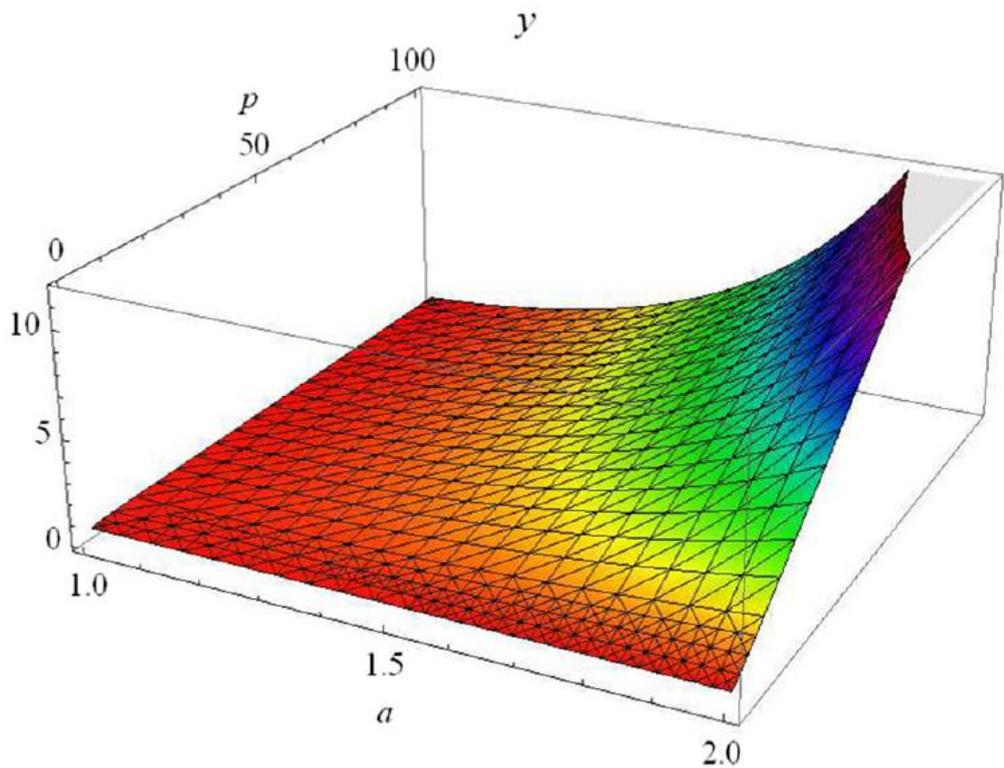


Рисунок 4.6 б) - Зависимость y от p для различных a (см. (4.41)) в логарифмическом масштабе при $1 < a \leq 2$. Трехмерный график.

Замечание. В работе [87] эйкональные частоты КНМ для заряженного скалярного поля в пространстве-времени заряженной черной дыры Рейснера – Нордстрема были получены аналитически в режиме $l^2 \geq Qq_* \geq l$, где Q - электрический заряд черной дыры, а q_* - электрический заряд поля. В этом режиме было показано, что полученные основные частоты выходят за пределы границы Хода. Следует отметить, что этот результат не может быть применен к нашему анализу для $a = 2$, поскольку мы имеем дело со случаем $q_* = 0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе представлены исследования гравитационной 4-мерной модели неэкстремальной дилатонной дионной черной дыры, включающей два скалярных (дилатонных) поля и два Абелевых векторных поля. На основании проведенных исследований можно сделать следующие выводы:

1. Получено дилатонное дионоподобное неэкстремальное чернотырное решение в модели 4-мерной гравитации с двумя скалярными (дилатонными) полями и двумя Абелевыми векторными полями, с экспоненциальной связью, управляемой двумя двумерными векторами дилатонной связи $\vec{\lambda}_1$ и $\vec{\lambda}_2$, удовлетворяющими неравенствам: $\vec{\lambda}_1(\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2) > 0$, $\vec{\lambda}_2(\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2) > 0$. Показано, что:

- в случае неколлинеарных векторов $\vec{\lambda}_1$, $\vec{\lambda}_2$ метрика решения описывает черную дыру с одним внешним горизонтом и сингулярностью, скрытой им;
- для коллинеарных векторов $\vec{\lambda}_1$, $\vec{\lambda}_2$ метрика совпадает с метрикой Рейснера–Нордстрема, имеющей два горизонта и скрытой сингулярностью.

2. Вычислены некоторые физические параметры неэкстремальной дилатон-дионной черной дыры, такие как гравитационная масса M , дублет скалярных зарядов \vec{Q}_φ , электрический и магнитный заряды Q_1 , Q_2 , связанные соотношением: $2(GM)^2 + \vec{Q}_\varphi^2 = Q_1^2 + Q_2^2 + 2\mu^2$, где $\mu > 0$ - параметр экстремальности, G - гравитационная постоянная.

3. Найдены термодинамические параметры черной дыры: температура Хокинга и энтропия Бекенштейна-Хокинга. Проверены первый закон термодинамики ЧД и соотношение Смарра.

4. С помощью метода разделения переменных получены базисные решения безмассового (ковариантного) уравнения Клейна–Фока–Гордона на фоне полученной статической и сферически-симметричной метрики.

5. Получено соотношение для эффективного потенциала пробного скалярного (электрически нейтрального) поля путем упрощения уравнения Клейна-Фока-Гордона через “черепашью” координату, приводящему к радиальному уравнению типа уравнения Шредингера. Этот потенциал содержит параметры решения, такие как $P > 0$, $\mu > 0$ и безразмерный параметр $a \in (0, 2]$, который зависит от векторов дилатонной связи $\vec{\lambda}_s$ - исходных параметров модели.

6. Получен спектр квазинормальных мод (КНМ) для пробного скалярного (электрически нейтрального) поля в эйкональном (ВКБ) приближении ($l \gg 1$, $l \gg n$, где l – орбитальное квантовое число, а n – число обертонов) на фоне метрики найденного решения, который управляется безразмерным параметром a : $0 < a \leq 2$, зависящим от $\vec{\lambda}_1$, $\vec{\lambda}_2$. Получено, что:

- найденный спектр в пределе $a = +0$ согласуется с результатом Б. Машхуна, отвечающим черной дыре Шварцшильда;

- при $a = 2$ согласуется с результатом Н. Андерсона, отвечающим заряженной черной дыре Рейснера-Нордстрема.

7. Для того, чтобы получить эйкональный спектр КНМ, были рассчитаны:

- значение радиальной координаты (радиус) R_0 , соответствующее максимуму эйкональной части эффективного потенциала;

- максимальное значение эйкональной части эффективного потенциала V_0 .

С помощью соотношений для R_0 и V_0 были рассчитаны циклические частоты КНМ в эйкональном приближении.

8. Исследована справедливость гипотетического неравенства Хоуда, связывающего температуру Хокинга и мнимую часть циклических частот КНМ. Оказалось, что это неравенство выполняется в эйкональном приближении ($l \gg 1$) и при наименьшем значении числа оборотов $n = 0$:

- для всех значений (коллективного) заряда $Q > 0$ при $0 < a \leq 1$;

- для достаточно малых значений заряда Q : $Q/M < q_{crit}(a)$ при $1 < a \leq 2$.

Можно сделать вывод, что поставленная цель достигнута, а задачи решены: получено точное сферически-симметричное дилатон-дионное чернотырное решение, рассчитаны некоторые физические характеристики дилатон-дионной черной дыры, проверены первый закон термодинамики и соотношение Смарра, вычислен спектр КНМ для безмассового пробного скалярного поля в эйкональном приближении, проверено неравенство Хоуда, связывающее температуру Хокинга и мнимую часть циклических частот КНМ.

Результаты, полученные в рамках выполнения диссертационной работы могут быть ценными для развития теории гравитации и астрофизики. Полученное точное решение для модели 4-мерной гравитации со скалярными полями и полями 2-форм, а также спектр КНМ для пробного поля на фоне решения могут быть полезными для понимания физики ЧД. Тщательный анализ КНМ весьма важен, так как он может дать информацию о ЧД и может пролить свет на природу сильного гравитационного поля.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Получение из уравнения типа Клейна-Фока-Гордона (4.8) уравнение типа Шредингера (4.18).

Запишем метрику в следующем виде:

$$ds^2 = -A(u)dt^2 + B(u)du^2 + C(u)d\Omega^2, \quad (\text{A.1})$$

где $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$ и $A, B, C > 0$.

Отсюда видно, что матрица компонент метрического тензора имеет вид:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C\sin^2\theta \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Для обратной матрицы $(g^{\mu\nu}) = (g_{\mu\nu})^{-1}$ получим

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -A^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C^{-1}\sin^{-2}\theta \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Определитель матрицы (A.2) равен:

$$|g| = ABC^2\sin^2\theta. \quad (\text{A.4})$$

Выпишем уравнение Клейна-Гордона со скалярным полем, которое содержит массовый член:

$$(\Delta[g] - \mu^2)\Psi = 0. \quad (\text{A.5})$$

Получим

$$\begin{aligned} \Delta[g]\Psi &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu (\sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Psi) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_t (\sqrt{|g|} g^{tt} \partial_t \Psi) + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_u (\sqrt{|g|} g^{uu} \partial_u \Psi) + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\theta (\sqrt{|g|} g^{\theta\theta} \partial_\theta \Psi) + \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\varphi (\sqrt{|g|} g^{\varphi\varphi} \partial_\varphi \Psi) = \mu^2 \Psi, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$\partial_t(g^{tt}\partial_t\Psi) + \frac{1}{\sqrt{ABC^2}}\partial_u\left(\sqrt{ABC^2}g^{uu}\partial_u\Psi\right) + \frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta g^{\theta\theta}\partial_\theta\Psi) + \partial_\varphi(g^{\varphi\varphi}\partial_\varphi\Psi) - \mu^2\Psi = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$-\partial_t(A^{-1}\partial_t\Psi) + \frac{1}{\sqrt{ABC^2}}\partial_u\left(\sqrt{ABC^2}B^{-1}\partial_u\Psi\right) + \frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta C^{-1}\partial_\theta\Psi) + \partial_\varphi\left(\frac{C^{-1}}{\sin^2\theta}\partial_\varphi\Psi\right) - \mu^2\Psi = 0, \quad (\text{A.8})$$

$$-A^{-1}\partial_t^2\Psi + \frac{1}{\sqrt{ABC^2}}\partial_u\left(\sqrt{ABC^2}B^{-1}\partial_u\Psi\right) + C^{-1}\left[\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta) + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\varphi^2\right]\Psi - \mu^2\Psi = 0, \quad (\text{A.9})$$

где $\left[\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta) + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\varphi^2\right] = \Delta_{S^2}$ есть оператор Бельтрами – Лапласа на двухмерной сфере S^2 .

$$-A^{-1}\partial_t^2\Psi + \frac{1}{\sqrt{ABC^2}}\partial_u\left(\sqrt{ABC^2}B^{-1}\partial_u\Psi\right) + C^{-1}\Delta_{S^2}\Psi - \mu^2\Psi = 0, \quad (\text{A.10})$$

$$\Psi = e^{i\omega t}\Psi_*(u)Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (\text{A.11})$$

$$\Delta_{S^2}Y_{lm}(\theta, \varphi) = -l(l+1)Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (\text{A.12})$$

$$A^{-1}\omega^2\Psi_* + \frac{1}{\sqrt{ABC^2}}\partial_u\left(\sqrt{ABC^2}B^{-1}\partial_u\Psi_*\right) - C^{-1}l(l+1)\Psi_* - \mu^2\Psi_* = 0, \quad (\text{A.13})$$

$$(A^{-1}\omega^2 - C^{-1}l(l+1) - \mu^2)\Psi_* + \frac{1}{\sqrt{ABC^2}}\partial_u\left(\sqrt{ABC^2}B^{-1}\partial_u\Psi_*\right) = 0, \quad (\text{A.14})$$

$$\left(\omega^2 - \frac{A}{C}l(l+1) - \mu^2A\right)\Psi_* + \frac{A}{\sqrt{ABC^2}}\left(\partial_u\left(\sqrt{ABC^2}B^{-1}\right)\right)\partial_u\Psi_* + \frac{A}{B}\partial_u^2\Psi_* = 0. \quad (\text{A.15})$$

Для того, чтобы получить уравнение типа Шредингера, необходимо сделать следующую замену

$$\Psi_*(u) = N(u)\Psi_{**}(u). \quad (\text{A.16})$$

и подобрать $N(u)$ таким образом, чтобы в полученном уравнении отсутствовали члены с первой производной $\partial_u \Psi_{**}$.

Подставим (A.16) в (A.15):

$$\begin{aligned} & \left(\omega^2 - \frac{A}{C} l(l+1) - \mu^2 A \right) N \Psi_{**} \\ & + \frac{A}{\sqrt{ABC^2}} \left(\partial_u \left(\sqrt{ABC^2} B^{-1} \right) \right) (N' \Psi_{**} + N \Psi_{**}') \\ & + \frac{A}{B} [N \Psi_{**}'' + 2N' \Psi_{**}' + N'' \Psi_{**}] = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Соберем члены, содержащие Ψ_{**}' и исключим их из уравнения (A.17). Тогда имеем:

$$\frac{A}{\sqrt{ABC^2}} \left(\sqrt{ABC^2} B^{-1} \right)' N \Psi_{**}' + 2 \frac{A}{B} N' \Psi_{**}' = 0, \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{B}{\sqrt{ABC^2}} \left(\sqrt{ABC^2} B^{-1} \right)' + 2 \frac{N'}{N} = 0, \quad (\text{A.19})$$

$$\left(\ln \left(\sqrt{ABC^2} B^{-1} \right) \right)' + 2(\ln N)' = 0, \quad (\text{A.20})$$

$$\ln \left(\sqrt{ABC^2} B^{-1} \right) + 2 \ln N = \text{const}, \quad (\text{A.21})$$

$$N(u) = e^{-\gamma(u)}, \quad (\text{A.22})$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \ln \left(\sqrt{ABC^2} B^{-1} \right). \quad (\text{A.23})$$

Таким образом мы нашли явный вид функции $N(u)$. Теперь подставим его в (A.17):

$$\begin{aligned} & \left(\omega^2 - \frac{A}{C} l(l+1) - \mu^2 A \right) \Psi_{**} + \frac{AB^{-1}}{B^{-1} \sqrt{ABC^2}} \left(\sqrt{ABC^2} B^{-1} \right)' \frac{N'}{N} \Psi_{**} + \\ & + \frac{A}{B} \left[\Psi_{**}'' + \frac{N''}{N} \Psi_{**} \right] = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

$$\frac{N'}{N} = -\gamma', \quad (\text{A.25})$$

$$N'' = (-\gamma' e^{-\gamma})' = -\gamma'' e^{-\gamma} + (\gamma')^2 e^{-\gamma}, \quad (\text{A.26})$$

$$\frac{N''}{N} = -\gamma'' + (\gamma')^2, \quad (\text{A.27})$$

$$\begin{aligned} & \left(\omega^2 - \frac{A}{C} l(l+1) - \mu^2 A \right) \Psi_{**} + \frac{A}{B} 2\gamma'(-\gamma') \Psi_{**} + \\ & + \frac{A}{B} (\Psi_{**}'' + (-\gamma'' + (\gamma')^2)) \Psi_{**} = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

$$\left[\omega^2 - \frac{A}{C} l(l+1) - \mu^2 A - \frac{A}{B} \gamma'' - \frac{A}{B} (\gamma')^2 \right] \Psi_{**} + \frac{A}{B} \Psi_{**}'' = 0, \quad (\text{A.29})$$

$$\frac{d^2 \Psi_{**}}{du^2} + \left\{ \frac{B}{A} \omega^2 - \frac{B}{C} l(l+1) - \mu^2 B - \gamma'' - (\gamma')^2 \right\} \Psi_{**} = 0, \quad (\text{A.30})$$

$$\Psi = e^{i\omega t} e^{-\gamma} \Psi_{**}(u) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (\text{A.31})$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \ln \left(\sqrt{ABC^2 B^{-1}} \right). \quad (\text{A.32})$$

Наше решение имеет вид (см. (4.12)):

$$s^2 = -f(R) dt^2 + \frac{dR^2}{f(R)} + H^a R^2 d\Omega^2, \quad (\text{A.33})$$

$$f(R) = f > 0. \quad (\text{A.34})$$

Для дальнейшего удобства сделаем замену переменных. Введем так называемую “черепашую” координату R_* :

$$\frac{dR}{f} = dR_*, \quad (\text{A.35})$$

После этого выражение можно переписать так:

$$ds^2 = -f dt^2 + f dR_* + H^a R^2 d\Omega^2. \quad (\text{A.36})$$

Отсюда сравнивая с (4.7), получим

$$f = A = B = H^{-a} \left(1 - \frac{2\mu}{R} \right), \quad (\text{A.37})$$

$$C = H^a R^2, \quad (\text{A.38})$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \ln C = \frac{1}{2} \ln(H^a R^2). \quad (\text{A.39})$$

Теперь уравнение (A.31) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{d^2 \Psi_{**}}{dR_*^2} + \left\{ \omega^2 - \frac{B}{C} l(l+1) - \mu^2 B - \gamma'' - (\gamma')^2 \right\} \Psi_{**} = 0. \quad (\text{A.40})$$

Так как наше скалярное поле безмассовое, то есть $\mu = 0$, то мы имеем:

$$\frac{d^2 \Psi_{**}}{dR_*^2} + \left\{ \omega^2 - \frac{B}{C} l(l+1) - \gamma'' - (\gamma')^2 \right\} \Psi_{**} = 0. \quad (\text{A.41})$$

Можно переписать (A.41) в виде уравнения типа Шредингера:

$$\frac{d^2 \Psi_{**}}{dR^2} + \{\omega^2 - V\} \Psi_{**} = 0. \quad (\text{A.42})$$

Сравнивая (A.42) с (A.41) можно найти значение V :

$$\begin{aligned} V &= \frac{B}{C} l(l+1) + \gamma'' + (\gamma')^2 = \\ &= \left| \gamma'' + (\gamma')^2 = \frac{d}{dR_*} \frac{d}{dR_*} \ln R + \left(\frac{d \ln R}{dR_*} \right)^2 = f \frac{d}{dR} \left(f \frac{d}{dR} \ln R \right) + \left(f \frac{d}{dR} \ln R \right)^2 \right. \\ &= f \frac{d}{dR} \left(\frac{f}{R} \right) + \left(\frac{f}{R} \right)^2 = f \frac{df}{dR} \Big| = \\ &= \frac{B}{C} l(l+1) + f \frac{df}{dR} = H^{-2a} \left(1 - \frac{2\mu}{R} \right) \frac{l(l+1)}{R^2} + \gamma'' + (\gamma')^2. \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

Получение КНМ в эйкональном приближении.

Запишем формулу (4.30):

$$\omega^2 = V_0 - i \left(n + \frac{1}{2} \right) \sqrt{-2V_0''} + O(1), \quad (\text{A.44})$$

где $V_0 = V_0(R_0)$ - максимальное значение эйкональной части эффективного потенциала.

Сделаем замену:

$$V_0 = \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 \tilde{V}_0, \quad (\text{A.45})$$

$$\begin{aligned}
\omega &= \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 \tilde{V}_0 - i\left(n + \frac{1}{2}\right) \sqrt{-2\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 \tilde{V}_0''} + O(1)} = \\
&= \left(l + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\tilde{V}_0} \sqrt{1 - \frac{i\left(n + \frac{1}{2}\right) \sqrt{-2\tilde{V}_0''}}{l + \frac{1}{2}} \frac{1}{\tilde{V}_0} + O\left(\frac{1}{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2}\right)} = \\
&= \left(l + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\tilde{V}_0} \left(1 - \frac{i\left(n + \frac{1}{2}\right) \sqrt{-2\tilde{V}_0''}}{l + \frac{1}{2}} \frac{1}{2\tilde{V}_0} + O\left(\frac{1}{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2}\right)\right) \quad (\text{A.46}) \\
&= \left(l + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\tilde{V}_0} - \frac{i\left(n + \frac{1}{2}\right) \sqrt{-2\tilde{V}_0''}}{2\sqrt{\tilde{V}_0}} + O\left(\frac{1}{l + \frac{1}{2}}\right).
\end{aligned}$$

Отсюда мы можем вывести реальную и мнимую часть КНМ:

$$Re\omega = \left(l + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\tilde{V}_0} + O\left(\frac{1}{l + \frac{1}{2}}\right), \quad (\text{A.47})$$

$$Im\omega = -\frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\sqrt{-2\tilde{V}_0''}}{\sqrt{\tilde{V}_0}} + O\left(\frac{1}{l + \frac{1}{2}}\right), \quad (\text{A.48})$$

Найдем значения \tilde{V}_0 и \tilde{V}_0'' :

$$\tilde{V}_0 = H_0^{-2a} \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right) R_0^{-2}, \quad (\text{A.49})$$

$$\tilde{V}_0''(R_*(R_0)) = f^2 \tilde{V}_{,RR} \Big|_{R=R_0} = \tilde{V}_0'', \quad (\text{A.50})$$

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_0'' &= f^2 \frac{d}{dR} \left(\frac{d\tilde{V}}{dR}\right) \Big|_{R=R_0} = \\
&= f^2 \frac{d}{dR} \left(-\frac{[4Pa - 6(R + P)\mu - 2aPR + 2R(R + P)]}{H^{2a+1}R^5}\right) \Big|_{R=R_0} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{f^2}{H_0^{2a+1}R_0^5} \frac{d}{dR} [4Pa - 6(R+P)\mu - 2aPR + 2R(R+P)] \Big|_{R=R_0} = \\
&= \frac{f_0^2 [6\mu + 2aP - 4R_0 - 2P]}{H_0^{2a+1}R_0^5} = -2f_0^2 \frac{H_0^{-2a-1}}{R_0^5} \sqrt{D}, \tag{A.51}
\end{aligned}$$

где $D > 0$, $0 < a \leq 2$.

Подставив (A.49), (A.51) в (A.47) и (A.48) получим:

$$Re\omega = \left(l + \frac{1}{2}\right) H_0^{-a} \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right)^{1/2} R_0^{-1} + O\left(\frac{1}{l + \frac{1}{2}}\right), \tag{A.52}$$

$$Im\omega = -\left(n + \frac{1}{2}\right) H_0^{-a-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{2\mu}{R}\right)^{\frac{1}{2}} R_0^{-\frac{3}{2}} D^{\frac{1}{4}} + O\left(\frac{1}{l + \frac{1}{2}}\right), \tag{A.53}$$

где $H_0 = 1 + \frac{P}{R_0}$, $l \gg 1$, $n \ll l$.

Вычисление КНМ для предельных случаев, соответствующих черным дырам Шварцшильда и Рейснера-Нордстрёма.

а) Случай черной дыры Шварцшильда.

В этом случае $a = 0$. Подставляя в (A.52) и (A.53) имеем:

$$\begin{aligned}
Re\omega &= \left(l + \frac{1}{2}\right) H_0^{-a} \left(1 - \frac{2\mu}{R_0}\right)^{1/2} R_0^{-1} + O\left(\frac{1}{l + \frac{1}{2}}\right) = \\
&= \left[\begin{array}{l} H_0^{-a} = |a = 0| = 1 \\ D = (a-1)^2 P^2 + (6-2a)P\mu + 9\mu^2 = |a = 0| = (P+3\mu)^2 \\ R_0 = \frac{1}{2}(a-1)P + \frac{3\mu}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{D} = |a = 0| = 3\mu \\ 1 - \frac{2\mu}{R_0} = 1 - \frac{2\mu}{3\mu} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ R_0^{-1} = \frac{1}{3\mu} \end{array} \right] = \left(l + \frac{1}{2}\right) \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{3\mu} + O\left(\frac{1}{l + \frac{1}{2}}\right) = \left| M = \mu + \frac{a}{2}P = |a = 0| = \mu \right| = \\
& = \left(l + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{3M} + O\left(\frac{1}{l + \frac{1}{2}}\right) = |r_0 = 3M| = \quad (A.54) \\
& = \left(l + \frac{1}{2} \right) \sqrt{\frac{M}{r_0^3}} + O\left(\frac{1}{l + \frac{1}{2}}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& Im\omega = -\left(n + \frac{1}{2}\right) H_0^{-a-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{2\mu}{R_0}\right)^{\frac{1}{2}} R_0^{-\frac{3}{2}} D^{\frac{1}{4}} + O\left(\frac{1}{l + \frac{1}{2}}\right) = \\
= & \left[\begin{array}{l} H_0^{-a-\frac{1}{2}} = |a = 0| = H_0^{-\frac{1}{2}} = \left(1 + \frac{P}{R_0}\right)^{-\frac{1}{2}} = |R_0 = r_0 = 3M = 3\mu| = \left(1 + \frac{P}{3\mu}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ D^{1/4} = (P + 3\mu)^{1/2} \\ R_0^{-3/2} = (3\mu)^{-3/2} \\ \left(1 - \frac{2\mu}{R_0}\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array} \right] \\
= & \\
& = -\left(n + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{P}{3\mu}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{3}} (3\mu)^{-\frac{3}{2}} (P + 3\mu)^{\frac{1}{2}} + O\left(\frac{1}{l + \frac{1}{2}}\right) \quad (A.55) \\
& = \left| \begin{array}{l} r_0 = 3M \\ M = \mu \end{array} \right| = -\left(n + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{M}{r_0^3}} + O\left(\frac{1}{l + \frac{1}{2}}\right).
\end{aligned}$$

Итак, мы получили формулы (4.35), (4.36).

б) Случай черной дыры Рейснера-Нордстрема.

В этом случае $a = 2$. Подставляя в (A.52) и (A.53) имеем:

$$Re\omega = \left(l + \frac{1}{2} \right) H_0^{-a} \left(1 - \frac{2\mu}{R_0}\right)^{1/2} R_0^{-1} + O\left(\frac{1}{l + \frac{1}{2}}\right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \left| H_0^{-a} = |a = 2| = H_0^{-a} = \left(1 + \frac{P}{R_0}\right)^{-2} = \frac{R_0^2}{(R_0 + P)^2} = |R_0 + P = r_0| = \frac{R_0^2}{r_0^2} \right| = \\
&= \left(l + \frac{1}{2} \right) \frac{R_0^2}{r_0^2} \sqrt{\frac{R_0 - 2\mu}{R_0} \frac{1}{R_0}} + O\left(\frac{1}{l + \frac{1}{2}}\right) = \\
&= \left(l + \frac{1}{2} \right) \sqrt{\frac{R_0^2 - 2R_0\mu}{r_0^4}} + O\left(\frac{1}{l + \frac{1}{2}}\right) = \\
&= \left| R_0^2 - 2R_0\mu = (r_0 - P)^2 - 2(r_0 - P)\mu = r_0^2 - 2r_0P + P^2 - 2r_0\mu + 2P\mu = \right. \\
&= r_0^2 - 2r_0P - 2r_0\mu + \frac{Q^2}{2} = r_0^2 - 2r_0(P + \mu) + \frac{Q^2}{2} \\
&= r_0^2 - 2r_0M + \frac{Q^2}{2} \left. \right| \\
&= \left| r_0^2 - 2r_0M + \frac{Q^2}{2} = \left(\frac{3M + \sqrt{9M^2 - 4Q^2}}{2}\right)^2 - 2\frac{3M + \sqrt{9M^2 - 4Q^2}}{2}M + \frac{Q^2}{2} = \right. \\
&= \frac{18M^2 - 4Q^2 + 6M\sqrt{9M^2 - 4Q^2} - 12M^2 - 4M\sqrt{9M^2 - 4Q^2} + 2Q^2}{4} \\
&= \frac{6M^2 + 2M\sqrt{9M^2 - 4Q^2} - 2Q^2}{4} = \frac{M(3M + \sqrt{9M^2 - 4Q^2}) - Q^2}{2} \\
&= \frac{2Mr_0 - Q^2}{2} = Mr_0 - \frac{Q^2}{2} \left. \right| \\
&= \left(l + \frac{1}{2} \right) \sqrt{\frac{Mr_0 - \frac{Q^2}{2}}{r_0^4}} + O\left(\frac{1}{l + \frac{1}{2}}\right) = \left(l + \frac{1}{2} \right) \sqrt{\frac{M}{r_0^3} - \frac{Q^2}{2r_0^4}} + O\left(\frac{1}{l + \frac{1}{2}}\right). \quad (\text{A.56})
\end{aligned}$$

Итак, мы получили формулу (4.38).

ПРИЛОЖЕНИЕ Б.

Аналитическое доказательство гипотезы Хода.

Здесь мы докажем предположение из раздела 4.3 для $0 < a < 1$. Квадратное уравнение из (4.42) для $x = x(p, a)$, выраженное через a, p имеет вид:

$$x^2 - [(a - 1)p + 3]x + (2a - 3)p = 0. \quad (\text{Б.1})$$

см. (4.23). В силу (4.27) имеем $x > 2$. Подставляя $x = u + 2$, получим:

$$u^2 + [(1 - a)p + 1]u = 2 + p = 1 + \frac{t - a}{1 - a}, \quad (\text{Б.2})$$

где $t = 1 + (1 - a)p$, $t > 1$ и $u > 0$ (поскольку больший корень квадратного уравнения (Б.2) $u = u_+$ и малый корень $u = u_-$ удовлетворяют неравенству $u_+ u_- = -2 - p < 0$). См. также уравнение (4.26) для $Z = u\mu$ ($\mu > 0$).

Таким образом, из (Б.2) следует:

$$\frac{p}{2} + 1 = \frac{u(u + t)}{2}. \quad (\text{Б.3})$$

Далее из уравнения (Б.2) получаем:

$$[1 - (1 - a)p]p = (u - 1)(u + 2), \quad (\text{Б.4})$$

откуда следует (в силу $p > 0, u > 0$):

$$1 < u < (1 - a)^{-1}. \quad (\text{Б.5})$$

Поэтому имеем:

$$p = \frac{(u - 1)(u + 2)}{1 - (1 - a)u}, \quad (\text{Б.6})$$

таким образом:

$$\frac{p}{x} + 1 = \frac{au}{1 - (1 - a)u}. \quad (\text{Б.7})$$

Наконец, из уравнения (4.42) для x получаем:

$$\sqrt{d} = 2x - (a - 1)p - 3 = 2u + t. \quad (\text{Б.8})$$

Подставляя все это в (4.41), мы видим, что необходимо доказать следующее неравенство:

$$y = 4 \left[\frac{(u+t)(1-(1-a)u)}{2a} \right]^a \left[\frac{1-(1-a)u}{au} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{u}{u+2} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{(t+2u)^{\frac{1}{2}}}{(u+2)^{\frac{3}{2}}} < 1. \quad (\text{Б.9})$$

Теперь из (Б.2) следует:

$$(1-a)u(t+a) = 1+t-2a, \quad (\text{Б.10})$$

поэтому первая скобка в (Б.9) упрощается до:

$$\left(\frac{u-1+2a}{2a} \right)^a = \left(1 + \frac{u-1}{2a} \right)^a \leq 1 + \frac{u-1}{2} = \frac{u+1}{2}. \quad (\text{Б.11})$$

Здесь мы использовали известное неравенство выпуклости $(1+v)^a \leq 1+av$, справедливое при $v > -1$ и $0 < a \leq 1$ (для нашего случая $v > -1$ выполняется в силу (Б.6)). Сокращая $u^{1/2}$ и собирая все степени $(u+2)$, мы остаемся с множителем:

$$F(t) = \frac{(1-(1-a)a)(2u+t)}{a}. \quad (\text{Б.12})$$

Здесь мы используем дифференцирование:

$$\frac{d}{dt} \ln F(t) = -\frac{(1-a)\dot{u}}{1-(1-a)u} + \frac{2\dot{u}+1}{2u+t}, \quad (\text{Б.13})$$

где $\dot{u} = du/dt$. Из (Б.2) имеем:

$$(1-a)(2u+t)\dot{u} = 1-(1-a)u, \quad (\text{Б.14})$$

а значит, $\dot{u} > 0$ (см. (Б.5)). Используя (Б.14), получаем:

$$\frac{d}{dt} \ln F(t) = -\frac{1}{2u+t} + \frac{2\dot{u}+1}{2u+t} = \frac{2\dot{u}}{2u+t}, \quad (\text{Б.15})$$

поэтому логарифмическая производная оценивается как:

$$\frac{d}{dt} \ln F(t) = \frac{2\dot{u}+1}{2u+t} < \frac{2\dot{u}}{2u+1} = \frac{d}{dt} \ln(2u+1), \quad (\text{Б.16})$$

(здесь мы используем $\dot{u} > 0$ и $t > 1$). Таким образом, интегрируя (Б.16) (по t от 1 до t) и используя совпадение начальных значений: $F(1) = 2u(1) + 1 = 3$ ($u(t) \rightarrow 1$ при $t \rightarrow 1$ и $p \rightarrow +0$) мы получаем:

$$F(t) < 2u + 1. \quad (\text{Б.17})$$

В итоге осталось доказать, что:

$$2(u + 1)\sqrt{2u + 1} < (u + 2)^2. \quad (\text{Б.18})$$

В самом деле:

$$(u + 2)^2 - 2(u + 1)\sqrt{2u + 1} = 2 + (u + 1 - \sqrt{2u + 1})^2 > 0. \quad (\text{Б.19})$$

Это завершает доказательство неравенства (Б.9) или, что то же самое, $y(p, a) < 1$ для всех положительных p и $0 < a < 1$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Мизнер Ч., Торн К., Уилер Д. Гравитация. В 3-х т. Т. 3. – М.: "Мир". – 1977. – 510 с.
- 2 Мошарев П.А. Эффекты нелинейной электродинамики с дилатоном и аксионом: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.04.16. – Москва, 2021. – 95 с.
- 3 Fujii Y. Mass of the dilaton and the cosmological constant //Progress of theoretical physics. – 2003. – Vol. 110. – №. 3. – P. 433-439.
- 4 Швингер Д. Магнитная модель материи // УФН. — 1971. — Т. 103, в. 2. — С. 355-365.
- 5 Bronnikov K. A., Shikin G. N. Interacting fields in general relativity //IZVESTIYA VYSSHIKH UCHEBNYKH ZAVEDENII FIZIKA. – 1977. – №. 9. – P. 25-30.
- 6 Gibbons G. W. Antigravitating black hole solitons with scalar hair in $N=4$ supergravity //Nuclear Physics B. – 1982. – Vol. 207. – №. 2. – P. 337-349.
- 7 Lee S. C. Kaluza-Klein dyons and the Toda lattice //Physics Letters B. – 1984. – Vol. 149. – №. 1-3. – P. 98-99.
- 8 Gibbons G. W., Wiltshire D. L. Spacetime as a membrane in higher dimensions //Nuclear Physics B. – 1987. – Vol. 287. – P. 717-742.
- 9 Heinrich O. Charged black holes in compactified higher-dimensional Einstein-Maxwell theory //Astronomische Nachrichten. – 1988. – Vol. 309. – P. 249-251.
- 10 Gibbons G. W., Maeda K. Black holes and membranes in higher-dimensional theories with dilaton fields //Nuclear Physics B. – 1988. – Vol. 298. – №. 4. – P. 741-775.
- 11 Garfinkle D., Horowitz G. T., Strominger A. Charged black holes in string theory //Physical Review D. – 1991. – Vol. 43. – №. 10. – P. 3140.
- 12 Cheng G. J., Hsu R. R., Lin W. F. Dyonic black holes in string theory //arXiv preprint hep-th/9302065. – 1993. – P. 1-20.
- 13 Gibbons G. W. et al. Supersymmetric self-gravitating solitons //Nuclear Physics B. – 1994. – Vol. 416. – №. 3. – P. 850-880.
- 14 Bleyer U. et al. Black hole stability in multidimensional gravity theory //Astronomische Nachrichten. – 1994. – Vol. 315. – №. 6. – P. 399-408.
- 15 Bleyer U., Ivashchuk V. D. Mass bounds for multidimensional charged dilatonic black holes //Physics Letters B. – 1994. – Vol. 332. – №. 3-4. – P. 292-296.
- 16 Poletti S. J., Twamley J., Wiltshire D. L. Charged dilaton black holes with a cosmological constant //Physical Review D. – 1995. – Vol. 51. – №. 10. – P. 5720.
- 17 Bronnikov K. A. On spherically symmetric solutions in D-dimensional dilaton gravity //arXiv preprint gr-qc/9505020. – 1995. – P. 1-13.
- 18 Lü H., Pope C. N. P-brane solitons in maximal supergravities //Nuclear Physics B. – 1996. – Vol. 465. – №. 1-2. – P. 127-156.
- 19 Duff M. J. et al. The black branes of M-theory //The World in Eleven Dimensions: Supergravity, Supermembranes and M-theory. – CRC Press, 1999. – P. 301-308.

- 20 Lü H., Pope C. N., Xu K. W. Liouville and Toda solitons in M-theory //Modern Physics Letters A. – 1996. – Vol. 11. – №. 22. – P. 1785-1795.
- 21 Ivashchuk V. D., Melnikov V. N. P-brane black holes for general intersections //arXiv preprint gr-qc/0002085. – 2000. – P. 1-12.
- 22 Ivashchuk V. D., Melnikov V. N. Black hole p-brane solutions for general intersection rules //Arxiv preprint hep-th/9910041. – 1999. – P. 1-27.
- 23 Ivashchuk V. D., Melnikov V. N. Toda p-brane black holes and polynomials related to Lie algebras //Classical and Quantum Gravity. – 2000. – Vol. 17. – №. 10. – P. 2073.
- 24 Ivashchuk V. D. On exact solutions in multidimensional gravity with antisymmetric forms //The Gravitational Constant: Generalized Gravitational Theories and Experiments. – Springer, Dordrecht, 2004. – P. 205-231.
- 25 Fadeev S. B. et al. On PPN parameters for dyonic black hole solutions //Гравитация и космология. – 2001. – Vol. 7. – №. 4. – P. 343-344.
- 26 Clément G. et al. Dyonic branes and linear dilaton background // Phys. Rev. D. American Physical Society. – 2006. – Vol. 73. – № 4. – P. 045018.
- 27 Gal'tsov D. V., Orlov D. G. Liouville and Toda dyonic branes: regularity and BPS limit //arXiv preprint hep-th/0512345. – 2005. – P. 1-16.
- 28 Lü H., Yang W. SL (n, R)-Toda black holes //Classical and Quantum Gravity. – 2013. – Vol. 30. – №. 23. – P. 235021.
- 29 Ivashchuk V. D. Black brane solutions governed by fluxbrane polynomials //Journal of Geometry and Physics. – 2014. – Vol. 86. – P. 101-111.
- 30 Gal'tsov D., Khramtsov M., Orlov D. “Triangular” extremal dilatonic dyons //Physics Letters B. – 2015. – Vol. 743. – P. 87-92.
- 31 Abishev M. E., Boshkayev K. A., Dzhunushaliev V. D. and Ivashchuk V. D. Dilatonic dyon black hole solutions //Classical and Quantum Gravity. – 2015. – Vol. 32. – №. 16. – P. 165010.
- 32 Abishev M. E., Boshkayev K. A., Ivashchuk V. D. Dilatonic dyon-like black hole solutions in the model with two Abelian gauge fields //The European Physical Journal C. – 2017. – Vol. 77. – №. 3. – P. 1-10.
- 33 Arkani-Hamed N. et al. Ghost condensation and a consistent infrared modification of gravity //Journal of High Energy Physics. – 2004. – Vol. 2004. – №. 05. – P. 074.
- 34 Komatsu E. et al. Seven-year wilkinson microwave anisotropy probe (WMAP*) observations: cosmological interpretation //The Astrophysical Journal Supplement Series. – 2011. – Vol. 192. – №. 2. – P. 18.
- 35 Abishev M. E., Ivashchuk V. D., Malybayev A. N. and Toktarbay S. Dyon-Like Black Hole Solutions in the Model with Two Abelian Gauge Fields //Gravitation and Cosmology. – 2019. – Vol. 25. – №. 4. – P. 374-382.
- 36 Zadora A., Gal'tsov D. V., Chen C. M. Higher-n triangular dilatonic black holes //Physics Letters B. – 2018. – Vol. 779. – P. 249-256.
- 37 Davydov E. A. Discreteness of dyonic dilaton black holes //Theoretical and Mathematical Physics. – 2018. – Vol. 197. – №. 2. – P. 1663-1676.
- 38 York Jr J. W. Dynamical origin of black-hole radiance //Physical Review D. – 1983. – Vol. 28. – №. 12. – P. 2929.

- 39 Vishveshwara C. V. Scattering of gravitational radiation by a Schwarzschild black-hole //Nature. – 1970. – Vol. 227. – №. 5261. – P. 936-938.
- 40 Конопля Р. А. Некоторые аспекты квазинормальных мод черных дыр: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.04.02. - Днепропетровск, 2003. - 74 с.
- 41 Chandrasekhar S., Detweiler S. The quasi-normal modes of the Schwarzschild black hole //Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences. – 1975. – Vol. 344. – №. 1639. – P. 441-452.
- 42 Ferrari V., Mashhoon B. Oscillations of a black hole //Physical review letters. – 1984. – Vol. 52. – №. 16. – P. 1361.
- 43 Blome H. J., Mashhoon B. Quasi-normal oscillations of a Schwarzschild black hole //Physics Letters A. – 1984. – Vol. 100. – №. 5. – P. 231-234.
- 44 Schutz B. F., Will C. M. Black hole normal modes: a semianalytic approach //The Astrophysical Journal. – 1985. – Vol. 291. – P. L33-L36.
- 45 Hatsuda Y. Quasinormal modes of black holes and Borel summation //Physical Review D. – 2020. – Vol. 101. – №. 2. – P. 024008.
- 46 Blome H. J., Mashhoon B. Quasi-normal oscillations of a Schwarzschild black hole //Physics Letters A. – 1984. – Vol. 100. – №. 5. – P. 231-234.
- 47 Andersson N., Onozawa H. Quasinormal modes of nearly extreme Reissner-Nordström black holes //Physical Review D. – 1996. – Vol. 54. – №. 12. – P. 7470.
- 48 Hod S. Universal bound on dynamical relaxation times and black-hole quasinormal ringing //Physical Review D. – 2007. – Vol. 75. – №. 6. – P. 064013.
- 49 Ivashchuk V. D., Melnikov V. N. “Exact solutions in multidimensional gravity with antisymmetric forms”, topical review, Class. Quantum Grav. 18, R82-R157. – 2001. – P. 1-63.
- 50 Grebeniuk M. A., Ivashchuk V. D., Kim S. W. Black-brane solution for C 2 algebra //Journal of Mathematical Physics. – 2002. – Vol. 43. – №. 12. – P. 6016-6023.
- 51 Goncharenko I. S., Ivashchuk V. D., Melnikov V. N. Fluxbrane and S-brane solutions with polynomials related to rank-2 Lie algebras //arXiv preprint math-ph/0612079. – 2006. – P. 1-5.
- 52 Zadora A., Gal'tsov D. V., Chen C. M. Higher-n triangular dilatonic black holes //Physics Letters B. – 2018. – Vol. 779. – P. 249-256.
- 53 Bronnikov K. A. “Block-orthogonal brane systems, black holes and wormholes” //Gravitation and Cosmology. – 1998. – Vol. 49. – №. 4. – P. 1-8.
- 54 Ivashchuk V. D., Melnikov V. N. Multidimensional cosmological and spherically symmetric solutions with intersecting p-branes //Mathematical and Quantum Aspects of Relativity and Cosmology. – Springer, Berlin, Heidelberg, 2000. – P. 214-247.
- 55 Cotsakis S., Ivashchuk V. D., Melnikov V. N. p-brane black holes and post-Newtonian approximation //arXiv preprint hep-th/9902148. – 1999. – P.1-12.
- 56 Ivashchuk V. D. On brane solutions with intersection rules related to Lie algebras //Symmetry. – 2017. – Vol. 9. – №. 8. – P. 155.
- 57 Bronnikov K. A., Shikin G. N. Interacting fields in general relativity theory //Soviet Physics Journal. – 1977. – Vol. 20. – №. 9. –P. 1138-1143.
- 58 Belissarova F. B. Boshkayev K. A., Ivashchuk V. D. and Malybayev A. N. Special dyon-like black hole solution in the model with two Abelian gauge fields and

two scalar fields //Journal of Physics: Conference Series. – IOP Publishing, 2020. – Vol. 1690. – №. 1. – P. 012143.

59 Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия: Методы и приложения. – М.: Наука. – 1986. – 760 с.

60 Poletti S. J., Twamley J., Wiltshire D. L. Dyonic dilaton black holes //Classical and Quantum Gravity. – 1995. – Vol. 12. – №. 7. – P. 1753.

61 Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: Учебное пособие в 10 т. Т. 2: Теория поля. – Москва: Физматлит. – 2003. – 536 с.

62 Will C. M. The confrontation between general relativity and experiment //Living reviews in relativity. – 2006. – Vol. 9. – №. 3. – P. 1-118.

63 Clément G., Fabris J. C., Rodrigues M. E. Phantom black holes in Einstein-Maxwell-dilaton theory //Physical Review D. – 2009. – Vol. 79. – №. 6. – P. 064021.

64 Azreg-Ainou M. et al. Phantom black holes and sigma models //Physical Review D. – 2011. – Vol. 83. – №. 12. – P. 124001.

65 Malybayev A. N., Boshkayev K. A., Ivashchuk V. D. Quasinormal modes in the field of a dyon-like dilatonic black hole //The European Physical Journal C. – 2021. – Vol. 81. – №. 5. – P. 1-12.

66 Kokkotas K. D., Schmidt B. G. Quasi-normal modes of stars and black holes //Living Reviews in Relativity. – 1999. – Vol. 2. – №. 1. – P. 1-72.

67 Nollert H. P. Quasinormal modes: the characteristic sound of black holes and neutron stars //Classical and Quantum Gravity. – 1999. – Vol. 16. – №. 12. – P. R159.

68 Berti E., Cardoso V., Starinets A. O. Quasinormal modes of black holes and black branes //Classical and Quantum Gravity. – 2009. – Vol. 26. – №. 16. – P. 163001.

69 Konoplya R. A., Zhidenko A. Quasinormal modes of black holes: From astrophysics to string theory //Reviews of Modern Physics. – 2011. – Vol. 83. – №. 3. – P. 793.

70 Ferrari V., Mashhoon B. New approach to the quasinormal modes of a black hole //Physical Review D. – 1984. – Vol. 30. – №. 2. – P. 295.

71 Fabris J. C., Richarte M. G., Saa A. Quasinormal modes and self-adjoint extensions of the Schrödinger operator //Physical Review D. – 2021. – Vol. 103. – №. 4. – P. 045001.

72 Konoplya R. A. Quasinormal modes of the electrically charged dilaton black hole //General Relativity and Gravitation. – 2002. – Vol. 34. – №. 2. – P. 329-335.

73 Ferrari V., Pauri M., Piazza F. Quasinormal modes of charged, dilaton black holes //Physical Review D. – 2001. – Vol. 63. – №. 6. – P. 064009.

74 Konoplya R. A. Decay of a charged scalar field around a black hole: Quasinormal modes of RN, RNAdS, and dilaton black holes //Physical Review D. – 2002. – Vol. 66. – №. 8. – P. 084007.

75 Chen S., Jing J. Dirac quasinormal modes of the Garfinkle–Horowitz–Strominger dilaton black-hole spacetime //Classical and Quantum Gravity. – 2005. – Vol. 22. – №. 6. – P. 1129.

76 Nomura H., Tamaki T. The asymptotic quasinormal modes of dilatonic black holes //Journal of Physics: Conference Series. – IOP Publishing, 2005. – Vol. 24. – №. 1. – P. 014.

- 77 Sakalli I. Quasinormal modes of charged dilaton black holes and their entropy spectra //Modern Physics Letters A. – 2013. – Vol. 28. – №. 27. – P. 1350109.
- 78 Kokkotas K. D., Konoplya R. A., Zhidenko A. Bifurcation of the quasinormal spectrum and Zero Damped Modes for rotating dilatonic black holes //Physical Review D. – 2015. – Vol. 92. – №. 6. – P. 064022.
- 79 Pacilio C., Brito R. Quasinormal modes of weakly charged Einstein-Maxwell-dilaton black holes //Physical Review D. – 2018. – Vol. 98. – №. 10. – P. 104042.
- 80 Blázquez-Salcedo J. L., Kahlen S., Kunz J. Quasinormal modes of dilatonic Reissner–Nordström black holes //The European Physical Journal C. – 2019. – Vol. 79. – №. 12. – P. 1-15.
- 81 Cardoso V. et al. Geodesic stability, Lyapunov exponents, and quasinormal modes //Physical Review D. – 2009. – Vol. 79. – №. 6. – P. 064016.
- 82 Virbhadra K. S., Ellis G. F. R. Schwarzschild black hole lensing //Physical Review D. – 2000. – Vol. 62. – №. 8. – P. 084003.
- 83 Cvetič M., Gibbons G. W., Pope C. N. Photon spheres and sonic horizons in black holes from supergravity and other theories //Physical Review D. – 2016. – Vol. 94. – №. 10. – P. 106005.
- 84 Konoplya R. A., Stuchlík Z. Are eikonal quasinormal modes linked to the unstable circular null geodesics? //Physics Letters B. – 2017. – Vol. 771. – P. 597-602.
- 85 Zinhailo A. F. Quasinormal modes of Dirac field in the Einstein–Dilaton–Gauss–Bonnet and Einstein–Weyl gravities //The European Physical Journal C. – 2019. – Vol. 79. – №. 11. – P. 1-8.
- 86 Cuyubamba M. A., Konoplya R. A., Zhidenko A. Quasinormal modes and a new instability of Einstein-Gauss-Bonnet black holes in the de Sitter world //Physical Review D. – 2016. – Vol. 93. – №. 10. – P. 104053.
- 87 Hod S. Quasinormal resonances of a charged scalar field in a charged Reissner–Nordström black-hole spacetime: A WKB analysis //Physics Letters B. – 2012. – Vol. 710. – №. 2. – P. 349-351.